Årg. 39:2 Juni 1956

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

ANDRA HÄFTET

HUGO THEORELL, Oxidationsenzymernas natur och verkningssätt 77

HELGE BOHLIN, En egendomlig lagbundenhet hos solsystemet 88

O. LINDSTAD, Litt om ski-hopping 93

TORBJÖRN LJUNGGREN, Några synpunkter på realgymnasiets dynamikkurs 102

Notiser: H. TORFGÅRD, Ett kaströrelseproblem; E. WETTERWIK, Cartesii dykare; HJ. TRANE, Resonans; G. STARCK, Kopparhalten i en 1-öring; B. ENGLUND, »Omvänd förbränning», Den osynliga glasstaven; F. HJERTING, Refraktionen, Solens granulation 108

Aktuellt: B. ADELL, Föreningen i Lund för matem. naturv. underv., årsmöte 15 april 1956; B. KJELLBERG, Pedagogiska problem i skolmatematiken. — Stipendier för kemistudier i Tyskland 114

Gradualavhandlingar: SVEN GÖSTA NILSSON; GÖSTA WRANGLÉN; LARS HÖRMANDER; ROLF TORSTEN PAULI; KATARINA KRAFT AHNLUND 116

Bokanmälningar: CODDINGTON/LEVINSON, Theory of Ordinary Differential Equations; HEILBRONN, Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach; LELONG-FERRAND, Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée; Colloque sur l'analyse statistique; OLSON/HJALMARS, Stereometri för reallinjens matematiska gren; ZAMANSKY, La sommation des séries divergentes; LIN, The Theory of Hydrodynamic Stability; ANDREW, Nuclear Magnetic Resonance; GRIVET, La résonance paramagnétique nucléaire; GUINIER/FOURNET, Small-Angle Scattering of X-Rays; FRIEDLANDER/KENNEDY, Nuclear and Radiochemistry; forts. å omslagets andra sida.

Problemavdelning:

Matematiska problem (red. av S. BÅGMAN) 138
Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen mars 1956 141
Realexamen v.t. 1956: Provräkning 147
Praktisk realexamen v.t. 1956: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laboratorieteknik, Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära 149

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (annonsbladet vid sid. 89).

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Redaktör och utgivare: C. E. Blom.

Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:— för årg. 35—38 kr. 12:50.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, t. o. m. 37—38.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 2:—
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm

---

Obs! En Elementaserie, årg. 15—34 i tio klotband kan erhållas från exp. Pris 250 kr.

Bokanmälningar (forts.): Sproull, Modern Physics, A Textbook for Engineers; Bachman, Physics, A Descriptive Interpretation; Beck, Thermionic Valves; Yarwood, High Vacuum Technique; Holowenko, Dynamics of Machinery; Pollermann, Bauelemente der physikalischen Technik; Münzinger, Atomkraft; West, Servomechanics; Grignard, Traité de chimie organique, Tome XXIII; Slaymaker, Bearing Lubrication Analysis; Krzikalla, Rechentafeln zur chemischen Elementaranalyse; Fierz-David, Die Entwicklungsgeschichte der Chemie; Mohler, Elektronentheorie der Chemie 121

Författare i detta häfte: lektor B. Adell, Lund; laborator B. Andersson, Stockholm; dr. H. Behrbohm, Linköping; fil. lic. G. Blom, Malmö; rektor H. Bohlin, Malmö; lektor E. Dahlin, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; docent T. Ganelius, Lund; tekn. dr. E. Glas, Stockholm; laborator U. Hellsten, Stockholm; lektor F. Hjerting, Köpenhamn; docent L. Hörmander, Chicago; lektor T. Jönsson, Stockholm; assistent W. Kirsten, Uppsala; laborator B. Kjellberg, Uppsala; fil. dr. Katarina Kraft Ahnlund, Stockholm; lektor S. Lennander, Växjö; lektor O. Lindstad, Oslo; laborator G. Lindstedt, Stockholm; lektor T. Ljunggren, Stockholm; laborator A. Magnéli, Stockholm; docent L. Melander, Stockholm; docent S. G. Nilsson, Lund; tekn. dr. R. Pauli, Stockholm; lärov.adj. K. v. Proschwitz, Stockholm; fil. lic. H. Riesel, Stockholm; professor H. Slätis, Stockholm; docent E. Staffansson, Göteborg; lektor G. Starck, Stockholm; professor J. Tandberg, Stockholm; professor H. Theorell, Stockholm; kapten H. Torfgård, Stockholm; lektor Hj. Trane, Jönköping; lärov. adj. E. Wetterwik, Stockholm; tekn. dr. G. Wranglén, Sundsvall

Lärobok i matematik

för realgymnasiets

biologiska gren

Fredrik Ehrnst

MATEMATIK för Rb

En ny lärobok som tillkommit med tanke på att de nya kursplanerna för gymnasiet ibland medfört att de olika kursmomenten måste hopplockas från olika böcker. Läroboken är direkt avpassad för realgymnasiets biologiska gren och innehåller alltså analytisk geometri och rymdgeometri, funktionslära och grunderna för matematisk statistik.
Boken är illustrerad med ett stort antal figurer.

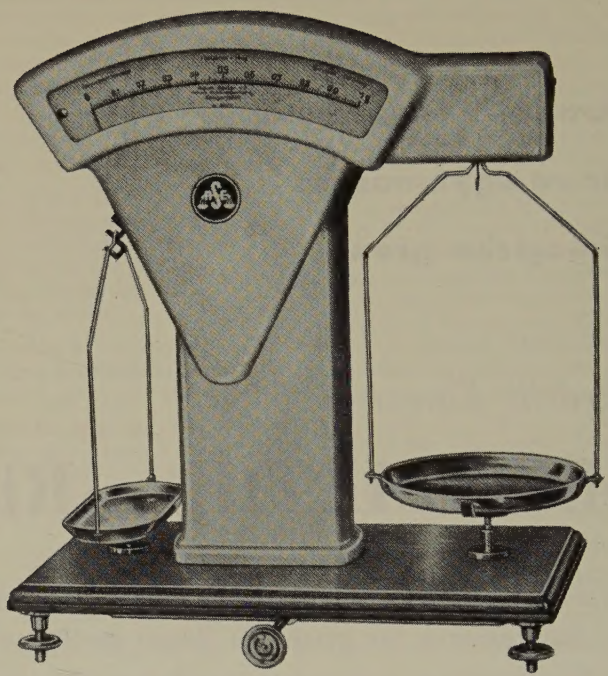
9: 50

Lärarrabatt vid direkt rekv. från förlaget

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159 - Stockholm 1 - Postgiro 758

AWE



SNABBVÅG

med magnetdämpning och skalavläsning
0—2 g

Max. belastning 500 g

Känslighet 10 mg

Vågen kan även erhållas med större och mindre belastningsområden

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Malmskillnadsgatan 48 c, Box 3082, Stockholm 3, Tel. 23 37 80

Malmgatan 10, Box 6058, Malmö 6, Tel. 381 25

Oxidationsenzymernas natur och verkningssätt

Av professor Hugo Theorell, Stockholm

Så gott som alla kemiska reaktioner i den levande naturen igångsätts och dirigeras i sitt förlopp av enzymer. Naturligtvis har under sådana förhållanden människan sedan urminnes tider sett exempel på vad vi nu kalla enzymatiska reaktioner, t. ex. jäsning och förruttnelse. Man skulle alltså kunna leda enzymernas historia tillbaka till de gamla grekerna, eller ännu längre om man så vill. Men det skulle vara rätt meningslöst, eftersom att observera ett fenomen ju inte är detsamma som att förklara det. Det är riktigare att säga att kunskapen om enzymerna väsentligen är en produkt av 1900-talets forskning.

Enzymerna är en slags *katalysatorer,* och det kan i detta sammanhang vara särdeles lämpligt att erinra om katalysbegreppets ursprung. Det uppställdes av en skolkamrat till mig från Linköpings läroverk. Jag fick aldrig äran att träffa honom, eftersom han var 124 år äldre än jag. Det var en av Karolinska Institutets och Svenska Läkaresällskapets grundare, Jöns Jacob Berzelius, som 1835 skrev i sin årsbok:

»Detta är en den oorganiska, likaväl som den organiska naturen tillhörig ny kraft att frambringa kemisk verksamhet, som säkert är mera utspridd, än vi hittills tänkt, och vars natur ännu är oss förborgad. Då jag kallar den en ny kraft, är det därvid icke min mening, att det skall vara en av materiens elektrokemiska relationer oberoende förmåga, tvärtom, jag kan icke förmoda annat, än att den är ett slags yttring av dessa, men så länge vi icke kunna inse deras inbördes sammanhang, lättar det våra forskningar att betrakta den, tills vidare, såsom en kraft för sig, likasom det skall lätta vårt avhandlande därav att därföre äga ett namn. Jag skall därföre, för att begagna en i kemien välkänd härledning, kalla den kroppars *katalytiska kraft,* sönderdelning genom denna kraft *katalys,* likasom vi med ordet *analys* beteckna åtskiljandet av kroppars beståndsdelar medelst den vanliga kemiska frändskapen. Den katalytiska kraften synes egentligen bestå däri, att kroppar genom sin blotta närvaro och icke genom sin frändskap förmå uppväcka frändskaper, som vid denna temperatur slumra ...»

Enzymerna är den biologiska världens katalysatorer, och Berzelius' beskrivning av den katalytiska kraften är förvånansvärt framsynt —

man frestas säga profetisk. Särskilt fäster man sig vid att han uttryckligen vägrar att tro att andra än kemiska krafter här skulle driva sitt spel; nej, när man en gång kunde komma underfund med mekanismen, så skulle det nog visa sig att den vanliga kemiens krafter räckte till att förklara också dessa ännu så länge mystiska reaktioner.

Det skulle komma att dröja bortåt 100 år innan man fick klarhet om att BERZELIUS haft rätt. År 1926 var ett märkesår. Den tyske kemisten RICHARD WILLSTÄTTER höll då ett föredrag i Deutsche Chemische Gesellschaft, i vilket han summerade erfarenheterna av sina mångåriga försök att framställa rena enzymer. Han hade genom diverse adsorptionsmetoder avlägsnat mer och mer av föroreningarna i några enzymer; särskilt hade han arbetat med en s. k. peroxidas, ett enzym som förekommer allmänt i växtriket. Till slut var där så litet substans kvar, att lösningarna vid vanlig analys på t. ex. äggvita, socker eller järn lämnade negativt resultat. Men den »katalytiska» enzymverkan fanns kvar. WILLSTÄTTER drog den slutsatsen, att enzymerna varken kunde vara äggvite-, kolhydrat- eller järnhaltiga och att de överhuvud taget icke tillhörde någon känd klass av kemiska ämnen, och han var rentav böjd för att tro att enzymernas verkningar härrörde från en ny naturkraft, en uppfattning som alltså BERZELIUS 90 år tidigare hade avfärdat som osannolik.

En ödets ironi gjorde, att den amerikanske forskaren J. B. SUMNER samma år publicerade ett arbete i vilket han påstod sig ha renkristalliserat ett enzym, ureas, ur »jackbeans». Det spjälkar urinämne till kolsyra och ammoniak. SUMNER hade fått fram sina kristaller i ganska betydande mängder med hjälp av mycket enklare metoder än dem som WILLSTÄTTER använt för sina reningsförsök på andra enzymer. SUMNERS kristaller bestod av färglös äggvita. Under de närmast följande åren kristalliserade J. H. NORTHROP och hans medarbetare ytterligare tre enzympreparat, pepsin, trypsin och chymotrypsin, liksom ureasen hydrolytiska enzymer som spjälkar bindningar genom att införa vatten.

Hade dessa upptäckter allt från början varit oomtvistade, så hade det nog inte dröjt 20 år innan SUMNER, tillsammans med NORTHROP och STANLEY, fått ett Nobelpris. Men det var inte så lätt att visa att de vackra äggvitekristallerna verkligen var själva enzymerna och inte bara ett inaktivt vehikel för små mängder av de verkliga enzymerna. Både SUMNER och NORTHROP androg många sannolikhetsbevis för att det verkligen var rena enzymer de hade framställt, men intet absolut bevisande försök kunde förebringas, och i själva verket var nog detta på den tiden omöjligt, helt enkelt därför att deras preparat syntes bestå av enbart färglös äggvita. Separations- och analysmetoderna var åtminstone vid denna tid, och är för övrigt än idag, knappast tillräckligt

förfinade för att säkert utesluta förekomsten av små mängder föroreningar i ett äggvitepreparat. Från många håll restes också betänkligheter mot SUMNERS och NORTHROPS resultat, varvid av naturliga skäl särskilt WILLSTÄTTER-skolan gjorde sig hörd.

Det gula enzymet

När jag 1933 som Rockefellerstipendiat kom till OTTO WARBURGS institut i Berlin, hade WARBURG och CHRISTIAN året förut framställt ett gulfärgat preparat av ett oxidationsenzym från jäst. Det var uppenbarligen mycket orent med avseende på de högmolekylära beståndsdelarna, som huvudsakligen bestod av gummiartade polysackarider. Den gula färgen var av särskilt intresse: den bleknade bort vid reduktion och återkom vid oxidation med t. ex. syrgas, så att det var tydligt att just det gula färgämnet hade med själva den enzymatiska oxidoreduktionsprocessen att göra. Det gula färgämnet kunde frigöras från den till sin natur ännu obekanta högmolekylära bäraresubstansen exempelvis genom behandling med sur metylalkohol, varvid enzymverkan försvann. Genom samtidiga arbeten av WARBURG i Berlin, KUHN i Heidelberg och KARRER i Zürich bestämdes det gula färgämnets (laktoflavin, senare riboflavin;=vitamin B_2) konstitution; se fig. 1.

Den enzymatiska verkan kunde här för första gången lokaliseras till en bestämd atomkonstellation: från substratet (hexosmonofosfat) lösgjort väte placeras under medverkan av ett särskilt enzymsystem (TPN-Zwischenferment), vars natur något senare utreddes, på flavinets kväveatomer (1) och (10) under uppkomst av det ofärgade leuko-

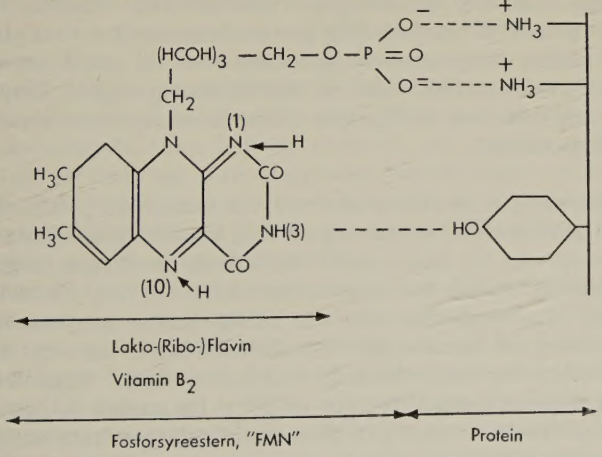


Fig. 1.

flavinet. Detta reoxideras av syrgas, varvid bildas vätesuperoxid, och kan sedermera reduceras om igen, osv. Denna cykliska process fortsätter sedan ända tills hela mängden substrat berövats två väteatomer och övergått till fosfoglukonsyra och en motsvarande mängd vätesuperoxid bildats. Det gula enzymet finns efter processens slut kvar i oförändrad form och har alltså tillsynes, som BERZELIUS uttryckte sig, genom sin blotta närvaro uppväckt en kemisk frändskap.

Nu återstod emellertid några högst viktiga frågor att reda ut: varför var flavinet i fri form alldeles overksamt, men verksamt när det satt förankrat till en högmolekylär bärare? Och vad var denna bärare? För att komma till klarhet om detta beslöt jag försöka rena det gula enzymet och använde då elektroforesmetoder som jag själv utarbetat. Vid denna tid hade TISELIUS ännu icke utarbetat sina tekniskt mera fulländade elektroforesmetoder, men mina egna visade sig i alla fall överraskande användbara.

Polysackariderna, som utgjorde 80—90 % av hela vikten, avlägsnades fullständigt jämte en del overksamma färglösa proteiner. Efter fraktionerade fällningar med ammoniumsulfat fick jag fram ett kristalliniskt preparat, som vid ultracentrifugering och elektrofores föreföll enhetligt. Enzymet var ett av flavindelen starkt gulfärgat protein med molekylvikten 75 000. Flavinanalysen gav 1 mol flavin per 1 mol protein. Genom dialys mot utspädd saltsyra vid låg temperatur skildes den gula färgen från proteinet, som då blev färglöst. Flavindelen och proteinet var i enzymprovet var för sig overksamma, men om flavindel och protein blandades vid ungefär neutral reaktion, så återkom enzymverkan, och den ursprungliga effekten kom tillbaka när man blandade dem i de molekylära proportionerna 1:1. Att därvid en förening mellan färgämnet och proteinet kom till stånd var dessutom uppenbart av andra skäl: den fria flavindelens gröngula färg övergick till rent gul, och dess starka gula fluorescens försvann genom kopplingen till proteinet.

Utvecklingen på flavinområdet var vid denna tid (1934) minst sagt hektisk. RICHARD KUHN trodde sig ett slag kunna resyntetisera det gula fermentet genom att sammanföra laktoflavin med min färglösa äggvitekomponent; redan när hans arbete kom i tryck, visste vi dock i Berlin att hans förmodan inte var riktig. Saken var nämligen den, att laktoflavin vid mina elektroforesförsök förhöll sig som en neutral kropp, medan den från det gula enzymet avskilda färgdelen hastigt vandrade anodiskt och alltså var en syra. En analys på fosfor visade 1 P per mol flavin, och när jag efter en tid (1934) lyckats renframställa den naturliga färgkomponenten visade sig denna vara en laktoflavin-

fosforsyreester, alltså en slags nukleotid, och det var uppenbart att fosforsyran tjänade till att binda färgdelen till proteinet.

Betydelsen av dessa undersökningar över det gula enzymet kan sammanfattas på följande sätt.

1. Den reversibla klyvningen av det gula enzymet till apoenzym+coenzym i den enkla molekylära relationen 1:1 bevisade att vi här hade att göra med ett rent enzym; försöken skulle vara obegripliga om själva enzymet varit bara en förorening.

2. Detta enzym var alltså bevisligen ett äggviteämne. Sedermera har alla de väl nu över 100 enzym, som sedan dess renframställts, visat sig vara äggviteämnen.

3. Det första coenzymet, flavinmononukleotid, som vi numera brukar kalla FMN, renframställdes och befanns vara en vitaminfosforsyreester. Sedermera har detta visat sig vara ett i naturen vida utbrett förhållande; vitaminerna nikotinsyreamid, thiamin och pyridoxin bildar på analogt sät nukleotidartade coenzym, som liksom nukleinsyrorna själva reversibelt förenar sig med proteiner.

Under de sista 20 åren har framställts en mångfald flavoproteiner med skiftande enzymverkningar. Många av dem innehåller i stället för FMN en dinukleotid, FAD, som består av FMN+adenylsyra.

Under de sista åren har teknikens framsteg gjort det möjligt att söka kemiskt definiera hur kopplingen mellan coenzym och enzym äger rum. Det numera s. k. »gamla» gula fermentet har därvid omigen visat sig vara ett förträffligt objekt. Vi konstruerade en mycket känslig apparat för att registrera tidsförloppet då FMN och äggvita förenas resp. spjälkas. Den förstnämnda reaktionen medför en uppmätbar minskning av den fluorescens, som FMN visar vid belysning med långvågigt ultraviolett ljus men som inte visas av dess proteinförening, den motsatta reaktionen en ökning av fluorescensens intensitet. Föreningshastigheten är under lämpliga betingelser mycket hög. Tack vare fluorescensmetodens stora känslighet kunde min norske medarbetare Agnar Nygaard och jag göra noggranna bestämningar av hastighetskonstanten helt enkelt genom att arbeta i extremt utspädda lösningar, där föreningshastigheten är låg därför att en FMN-molekyl så sällan råkar kollidera med en proteinmolekyl.

Vi bestämde nu reaktionshastigheterna under olika betingelser: vi varierade surhetsgrad, jonmiljö och temperatur, och vi behandlade proteinet med en mångfald olika reagens som på känt sätt inverkar på olika grupper i proteiner. På så sätt lyckades vi med tämlig säkerhet lista ut att fosforsyra i FMN binds till primära aminogrupper i äggvitan, och iminogruppen (3) i FMN till den fenoliska hydroxylgruppen i en tyrosinrest, varigenom fluorescensen utsläckes.

Ännu begriper vi inte hur enzymäggvitan genom sin koppling till coenzymet »aktiverar» det till att hastigt ta upp och hastigt avge väte. Men något vet vi. Enzymets s. k. oxidoreduktionspotential är i varje fall av stor betydelse, och den bestäms av en enkel relation till dissociationskonstanterna för det oxiderade, resp. reducerade coenzym--enzymkomplexet. Dissociationskonstanterna i sin tur är funktioner av hastighetskonstanterna för föreningen mellan coenzym och enzym, resp. den omvända processen, och dessa hastighetskonstanter har vi kunnat bestämma både i det gula fermentet och i en del andra enzymsystem. Utan att gå närmare in i detaljer kan man nämna, att kopplingen av coenzym till enzym befanns ha överraskande stora effekter på de förras potential. Effekten är i en del fall starkt beroende av variationer i salthalten. Här anar vi fysiologiskt betydelsefulla sammanhang.

Häminproteider

Redan innan jag for till Berlin 1933 hade jag kommit att intressera mig för en nära släkting till hämoglobinet, det 1897 av K. A. H. Mörner på spektroskopisk väg upptäckta myokromet, eller som det sedan kallats, myoglobinet, och renkristalliserat det 1932.

Efter hemkomsten grep jag mig an med att rena en annan häminproteid, nämligen cytokrom c, en av de »histohämatiner» eller »myohämatiner», som irländaren MacMunn iakttagit i sitt hemmagjorda spektroskop i slutet av 1880-talet. MacMunns »hämatiner» hade efter en tids undanskymd tillvaro på petitstilsrader i större läroböcker åter dragits fram i ljuset av David Keilin i Cambridge 1925. 1936 hade vi fått cytokromet ungefär 80 % rent, och 1939 i varje fall mycket nära 100 %.

Det är ett vackert rött, järn-porfyrinhaltigt äggviteämne, som fungerar som en länk i cellandningsenzymernas kedja genom att järnatomen ömsom tar upp och ömsom avger en elektron och järnet alltså växlar valens mellan det 3-värda ferri- och det 2-värda ferrostadiet. Det är en mycket trevlig substans att arbeta med, inte bara för att den är vacker att se på, utan också för att den är ovanligt stabil och hållbar. Från 100 kg hästhjärtkött kan man framställa 3—4 gram rent cytokrom c. Molekylen väger ca 12 000 och innehåller en mol järnporfyrin per mol.

Reducerat cytokrom c kan inte reagera med molekylärt syre. Det kan alltså icke i en kedja av oxidationsenzymer komma närmast syret. Cytokroms oförmåga att reagera med syre var ett frapperande faktum, som krävde sin förklaring. En annan egendomlighet var den särdeles fasta bindningen mellan det röda häminfärgämnet och ägg-

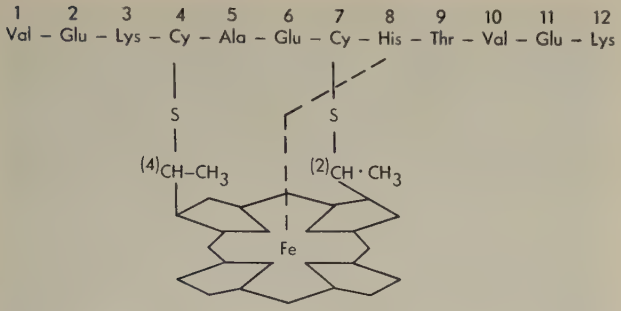


Fig. 2. Peptidkedjan 1—12 är medelst två cystein-S-bryggor och en bindning histidin-Fe bunden till häminet.

I figuren använda förkortningar: Val=aminosyran valin; Glu=glutamin; Lys=lysin; Cy=cystein; Ala=alanin; His=histidin; Thr=threonin.

vitedelen; i olikhet mot de flesta andra häminproteider kan färgämnet icke avspjälkas genom tillsats av saltsur aceton. Vidare förefanns en förskjutning av ljusabsorptionsbanden, som tydde på att de i det vanliga protohäminet befintliga båda omättade vinylgrupperna i cytokromets hämatin var mättade. 1938 lyckades vi visa, att cytokromets porfyrindel var bunden till äggvitan medelst två svavelbryggor från cysteinrester i äggvitan till porfyrinet på så sätt, att vinylgrupperna mättades och övergick till α-tioetylgrupper. Därmed var bindningens fasthet och förskjutningen av spektralbanden förklarade. Detta var första gången, som naturen av kemiska bindningar mellan »prostetisk» grupp (i detta fall järnporfyrin) och äggvitedelen i ett enzym hade kunnat uppdagas. Karl-Gustav Paul har senare funnit en elegant metod att spjälka svavelbryggorna med silversalter och har med organiskt-kemiska metoder slutgiltigt bekräftat konstitutionen i denna del.

Cytokroms ljusabsorptionsband visade att det är en s.k. hämokromogen, vilket innebär att två i allmänhet kvävehaltiga grupper sitter bundna till järnet, förutom de fyra pyrrolkväveatomerna i porfyrinet. Ur magnetiska mätningar som jag gjorde hos Linus Pauling i Pasadena, samt ur aminosyreanalyser, titreringskurvor och spektrofotometri tillsammans med Å. Åkeson framgick (1941) att kvävehaltiga, hämakromogenbildande grupperna i cytokrom c var histidinrester, närmare bestämt deras imidazolgrupper.

På sista tiden har vi hunnit en bit längre på vägen. Tuppy & Bodo i Wien började förra året med Sangers metod reda ut aminosyresekvensen i de häminhaltiga peptidfragment, som man får genom

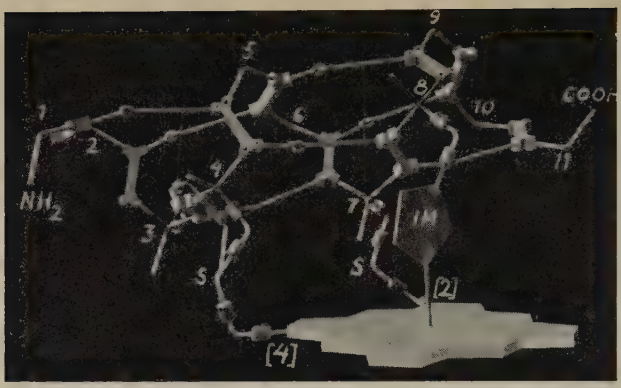


Fig. 3. Sterisk modell av den efter pepsindigestion av cytokrom c återstående hämopeptiden, konstruerad av metalldelar som återger atomavstånd och valensriktningar. I figuren är peptidkedjan medelst »vätebindningar» anordnad som en vänstervriden α-spiral, sedd vinkelrätt mot längdaxeln. Både svavelbryggorna (S) och histidinets imidazolgrupp (IM) passar då till sina riktiga bindningsställen, och peptidkedjan blir parallell med häminskivan (den ljusa, polygonala metallskivan nederst på bilden).

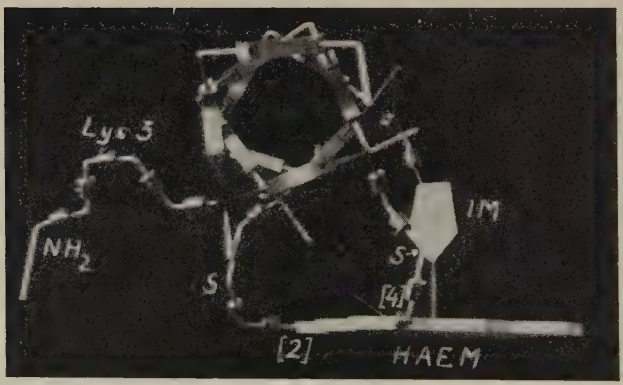


Fig. 4. Modellen sedd i α-spiralens längdriktning. För överskådlighetens skull har sidokedjorna inbyggts endast på aminosyrorna Lys (3), Cy (4), Cy (7) och His (8).

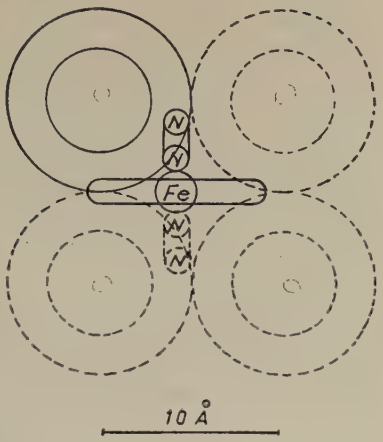


Fig. 5. Hypotetiskt tvärsnitt genom en cytokrom-c-molekyl. Heldragna linjer: hämopeptiden. Streckade linjer: med pepsin avspjälkade delar av den naturliga molekylen. Området mellan de yttre och inre cirklarna upptas av aminosyrornas sidokedjor. De fyra peptidkedjorna omger järnatomen (Fe) så att den är oåtkomlig för syrgas.

proteolytisk nedbrytning av cytokrom c, och lyckades bestämma den inbördes ordningen mellan aminosyrorna närmast häminet. Försöken fortsattes och kompletterades av Tuppy, Paléus & Ehrenberg hos oss i Stockholm med resultat, som framgår av fig. 2.

När Linus Pauling 1954 höll sin Nobelföreläsning i Stockholm, visade han en ny sorts modeller för att studera den steriska konfigurationen hos peptidkedjor, som ju kan bilda spiraler eller veckade blad av olika slag. Det föll mig då in, att det skulle vara högst intressant att studera vilka av dessa olika möjligheter som kunde vara förenliga med svavelbryggorna till hämindelen och med kopplingen av kvävehaltiga grupper till järnet.

Anders Ehrenberg och jag gjorde oss nu en häminmodell i samma skala som peptidbitarna och byggde ihop modeller av häminpeptider med alla tänkbara varianter av vätebindningar. Det visade sig att många varianter kunde säkert uteslutas på grund av steriska hinder, och andra var osannolika av andra skäl. Av de ursprungliga minst 20 alternativen kvarstod till slut endast ett — en vänstervriden α-spiral med cysteinresten nr 4 bunden till porfyrinsidokedjan i 4-ställning, och cystein nr 7 till sidokedjan i 2-ställning. Se fig. 3 och 4. Imidazolresten passade precis till bindning med järnatomen. Peptidspiralen blir parallell med häminskivans plan.

Jag tror att man kan säga, att det var av betydande intresse att få Paulings och Coreys viktigaste spiral bekräftad med rent kemiska metoder, vilket ju i vårt fall var möjligt tack vare den unika omständigheten att vi hade en kort peptid bunden på icke mindre än tre ställen till en rigid struktur, häminet. Sedan vi sänt detta arbete i

tryck kom från ARNDT & RILEY i England en röntgenkristallografisk bekräftelse på att cytokrom c innehåller just vänstervridna α-spiraler.

Genom beräkningar på grundval av cytokromets kända specifika vikt anser vi nu ytterst sannolikt att häminskivan i cytokrom c är omgiven av peptidspiraler på alla sidor på så sätt att häminjärnet är helt avskärmat från kontakt med syrgas; därav förklaras vårt försök i vilket vi icke kunde oxidera reducerat cytokrom c med syrgas. Syret kommer helt enkelt icke åt järnatomen. Däremot finns det en möjlighet för elektroner att via imidazolgrupperna gå ut och in i järnatomen. Se fig. 5.

En sjättedel av hela cytokrommolekylens steriska byggnad är i och med detta utredd, och vi skymtar vidare möjligheter att så småningom utreda resten. Det tycks oss vara intressant, att man redan på detta stadium börjar förstå cytokromets speciella reaktionssätt ur vad vi nu vet om dess kemiska konstitution.

Peroxidaser och katalaser

Dessa är efter vad vi numera vet häminproteider, alltså nära släktingar till hämoglobin och cytokromer. Deras sätt att verka iakttogs redan på 1800-talet, för katalasernas del redan i början, peroxidaserna i mitten. Det var nästan oundvikligt, att den som först framställde vätesuperoxid, fransmannen THÉNARD, också skulle upptäcka katalaseffekten; så snart man bringar vätesuperoxid i beröring med de flesta nativa biologiska material, så sönderdelas vätesuperoxiden under gasutveckling till syrgas + vatten. Att katalaserna innehåller hämin som verksam grupp gjordes troligt av ZEILE & HELLSTRÖM hos HANS VON EULER 1930, och den första katalasen, från kolever, kristalliserades av SUMNER & DOUNCE 1937.

> Exp. 1. Till 3 % H_2O_2 i fosfatbuffer pH 7 sättes ca 0,2 mg katalas. En våldsam gasutveckling iakttages. Sedan bubblingen lugnat sig, hälles innehållet ut, och ny H_2O_2 + buffert tillsättes. Bubblingen fortsätter likväl som följd av minimala mängder kvarvarande katalas.

Peroxidaserna finns allmänt i växtriket. När vi 1941 för första gången kristalliserade en peroxidas, ur pepparrot, så visade den sig mot alla WILLSTÄTTERS förmodanden innehålla både äggvita, kolhydrat och hämin, alltså järn. Orsaken till att WILLSTÄTTER inte kunnat påvisa någotdera i sina utspädda lösningar som dock ännu var aktiva, var helt enkelt den att WILLSTÄTTER råkat på ett alldeles ovanligt starkt aktivt enzym. Ett tusendels milligram i en liter lösning ger ännu en tydlig effekt. Peroxidaserna sönderdelar inte vätesuperoxid

direkt, men »aktiverar» den till att oxidera en hel rad hydrokinoner, aniliner, eller t. o. m. nitrit.

Exp. 2. H_2O_2 i acetatbuffer, pH 4,6, försättes med ett spår peroxidas: ingen effekt. Nu tillsättes benzidin: blåfärgning.

Peroxidaser finns här och var i animaliskt material, t. ex. leukocyter (verdoperoxidas, renframställd av KJELL AGNER 1941) och i mjölk (lactoperoxidas, renframställd av mig själv och ÅKESON något år senare).

I de levande cellerna fungerar både katalaser och peroxidaser på likadant sätt genom att använda den vätesuperoxid, som uppstår vid syrgasens reaktion med en hel rad autoxidabla substanser, såsom flaviner, ascorbinsyra m. fl., till att oxidera annars svårförbränneliga substrat. Särskilt intressant är AGNERS iakttagelse, att verdoperoxidasen i leukocyterna + H_2O_2 kan detoxikera exempelvis tetanus- och difteritoxin, vilket ju skulle förklara en av leukocyternas huvudsakliga funktioner.

Katalaser och peroxidaser ger båda med H_2O_2 först grönaktiga komplexföreningar, sedan rödaktiga. Studiet av dessa har erbjudit ofantligt intrikata problem, där vi fått använda kombinationer av spektrofotometriska och numera mycket förfinade magnetiska metoder för att söka reda ut mekanismen. Vår amerikanska kollega BRITTON CHANCE, som 1946—1948 arbetade på Nobelinstitutet, har med framgång vidare bearbetat detta område.

Till slut: vad är enzymforskningens yttersta mål? — Den första etappen är att utforska hela den steriska konstitutionen på alla enzymer — en liten nätt uppgift! Hittills känner vi den *lättast* åtkomliga sjättedelen av den minsta enzymmolekylen, cytokrom c.

I andra etappen gäller det att bestämma hur enzymerna är ordnade i cellstrukturerna. Detta betyder i själva verket att fylla den gapande klyftan mellan biokemi och morfologi.

Ovanstående artikel är — med den reservation som nedan anges — professor Theorells nobelföreläsning den 12 dec. 1955, och tillrättalagd för ett ungdomligt auditorium utgjorde den ämnet för ett föredrag under Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar i början av året. Se Elementas marsh. sid. 13 och 44.

Redaktionen framför ett vördsamt tack till professor Theorell för att han velat ställa föreläsningen till Elementas förfogande, men måste beklaga att utrymmesskäl tyvärr tvingat tidskriften att — med författarens medgivande — utesluta ett avsnitt av alkoholdehydrogenaser. Detta avsnitt återfinnes i en utförligare framställning i »Nordisk Medicin» *55* (1956), *1*. *Red.*

En egendomlig lagbundenhet hos solsystemet

Av rektor Helge Bohlin, Malmö

I två uppsatser i Cassiopeia, Tycho Brahesällskapets årsbok, 1952 och 1954 har författaren redogjort för vissa numeriska sammanhang inom planetsystemet, som han funnit och som icke synas ha blivit beaktade tidigare. Nedanstående är i huvudsak en kort sammanfattning av innehållet i ovannämnda uppsatser. Angående litteraturuppgifter hänvisas till dessa.

I. Symmetrilagen

I tabell I finner man huvudplaneternas namn och en viss numrering av dem, positiva nummer utåt från Jupiter, negativa inåt mot solen. Vidare äro planeternas medelhastigheter och medelavstånd från solen angivna. Avstånden och hastigheterna äro kontrollerade med hjälp av nyare astronomiska översiktsarbeten (Wallenquist, Den moderna astronomin, Harold Urey, The Planets m. fl.) vilka upptaga i det närmaste samstämmiga siffror. För asteroiderna har lämnats en lucka i tabellen mellan Mars och Jupiter. Merkurius numrering har lämnats öppen, vilket motiveras i fortsättningen. Medelhastigheterna betecknas i de följande räkningarna med v och solavstånden med a, varvid planetens nummer placeras som index.

Tabell I

	Merkurius	Venus	Jorden	Mars	Asteroid	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus	Pluto	
	$m(-8)$	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	
v	4,79	3.50	2,98	2,44	(1,72)	1,30	0,960	0,680	0,542	0,474	$\cdot 10^4$ m/
a	5,8	10.8	14,95	22,8	(44,6)	77,8	143	287	449	591	$\cdot 10^{10}$ m

Med hastighetssiffrorna i tabellen göras följande räkningar[1]:

$$v_{-2} \cdot v_{+2} = 2{,}44 \cdot 0{,}680 = 1{,}66$$
$$v_{-3} \cdot v_{+3} = 2{,}98 \cdot 0{,}542 = 1{,}61$$
$$v_{-4} \cdot v_{+4} = 3{,}50 \cdot 0{,}474 = 1{,}66$$
$$v_0^2 = 1{,}30^2 = 1{,}69$$

Dessa fyra hastighetsprodukter skilja sig från medelvärdet (1,65) med mindre än ± 3 %, under det att faktorerna var för sig variera inom vida gränser. Man har därför skäl förmoda, att denna hastighetens egendomliga symmetri omkring en axel sammanfallande med jupiterbanan (eller kanske något utanför denna) sammanhänger med någon hittills icke känd egenskap hos planetsystemet.

[1] Sifferräkningarna här liksom i fortsättningen äro gjorda med räknesticka, då en större noggrannhet i detta sammanhang vore utan betydelse.

IORSTEDTS EXPERIMENTSATSER

ÖR

PTIK

ed Norstedts optiklåda kan Ni utföra alla de försök som ingår realskolans kurs i optik. Experimentsatsens olika detaljer ligger mlade i en trälåda av standardformat som Ni lätt kan bära med Er. aterielen är lätt att handskas med, ooöm och enkel att ställa i dning. Samma materiel finns avpassad för elevlaborationer och vereras då i lådor för grupper om 6, 8 eller 10 elever.

ORSTEDTS SKOLAVDELNING

ckholm, Lilla Nygatan 13, tel. 23 29 70

teborgskontoret	Malmökontoret	Linköpingskontoret	Luleåkontoret
kgatan 19	Hamngatan 4	Klostergatan 26	Tullgatan 16
13 92 93	tel. 97 70 90	tel. 487 20	tel. 134 10

Insänd litteratur

JACK HINE, *Physical Organic Chemistry.* McGraw-Hill Book Co. New York/Toronto/London 1956, Pp. 497, 67 s. 6 d.

JAMES ENGLISH JR/HAROLD G. CASSIDY, *Principles of Organic Chemistry.* Sec. Ed. McGraw-Hill 1956, Pp. 469, 49 s. net.

C. W. SMITH, *Aircraft Gas Turbines.* J. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London 1956, Pp. 448, $ 8.75.

A. STANLEY THOMPSON/OLIVER E. RODGERS, *Thermal Power from Nuclear Reactors.* J. Wiley/Chapman & Hall 1956, Pp. 229, $ 7.25.

DUDLEY D. FULLER, *Theory and Practice of Lubrication.* J. Wiley/Chapman & Hall 1956, Pp. 432, $ 10.50.

RICHARD G. CANNING, *Electronic Data Processing for Business and Industry.* J. Wiley/Chapman & Hall 1956, Pp. 332, $ 7.00.

High Temperature Technology. Edited by I. E. Campbell. J. Wiley/Chapman & Hall 1956, Pp. 526, $ 15.00.

ERWIN SCHRÖDINGER, *Expanding Universe.* Cambridge Univ. Press 1956, Pp. 93, 17 s. 6 d.

ERNEST H. HUTTON, *The Language of Modern Physics.* Allen & Unwin, London 1956, Pp. 278, 21 s. net.

G. O. JONES/J. ROTBLAT/G. J. WHITROW, *Atoms and the Universe.* Eyre & Spottiswood, London 1956, Pp. 254, 25 s. net.

Surveys in Mechanics, The G. T. Taylor 70th. Ann. Vol. Edited by G. K. Batchelor & R. M. Davies, Cambridge Univ. Press 1956, Pp. 475, 50 s. net.

Electromagnetically Enriched Isotopes and Mass Spectrometry. Proceed. of the Conference in Harwood 13—16 Sept. 1955. Ed. by M. L. Smith. Butterworth Scientific Publ. London 1956, Pp. 272, 45 s. net.

A. MONJALLON, *Initiation au calcul matriciel.* Librairie Vuibert, Paris 1956, 132 p., 700 fr.

SHIMON YIFTAH, *Constantes fondamentales des théories physiques.* Gauthier-Villars, Paris 1956, 124 p., 2300 fr.

G. HEILBRONN, *Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drach.* Gauthier-Villars, Paris 1956, 102 p., 1300 fr.

EDMOND BAUER, *Champ de vecteurs et de tenséurs.* Introduction à l'électromagnétisme. Masson, Paris 1955, 204 p., 2200 fr.

JACQUES ERRERA, *Chimie physique nucléaire appliquée. Masson, Paris 1956,* 226 p., 2100 fr.

ROBERT CAMPBELL, *Théorie générale de l'équation de Mathieu.* Masson, Paris 1955, 272 p., 2400 fr.

L. BRILLOUIN/M. PARODI, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques.* Masson, Paris, 1956, 348 p., 4600 fr.

W. BLASCHKE,*Kreis und Kugel.* 2. Aufl. W. de Gruyter & Co., Berlin 1956, 167 S., DM 18,60.

H. GASK, *Ordinära differentialekv.* 2:a uppl. Lunds Matematiska Sällskaps kompendier nr 3, Lund 1956, 45 s., kr. 8: —.

Initiering av sprängämnen. Föredrag vid kollokvium 14—15 april 1955. Nationalkomm. för Mekanik. Stenc. FOA 2, Stockholm 80, kr. 20: —.

TORD HALL, *Atomer och stjärnor.* Norstedts, Sthlm 1956, 164 s., kr. 13: 50.

Radiohandbok 1956. Nordisk Rotogravyr 1956, 48 s., kr. 4: —.

N. EVERMARK, *Elektroteknik.* Gleerups, Lund 1956, 208 s., kr. 7:75.

HEDSTRÖM/RENDAHL/EKBOM, *Algebra och plangeometri del 1.* För allm. linjen. Sv. Bokförlaget (Bonniers), Stockholm 1956, 233 s., kr. 6: 25.

MOLL-RUDBERG, *Värmelära.* Sv. Bokförlaget (Norstedts), 1956, 91 s., kr. 4: 50.

Såsom formel kan symmetrilagen skrivas:

$$v_{-x} \cdot v_{+x} = v_0^2 = 1{,}65 \cdot 10^8 \ (\mathrm{m/s})^2 \qquad (1)$$

Motsvarande symmetri gäller även medelavstånden från solen, som följande räkning visar: Om medelavstånden från solen till två planeter betecknas med a_1 och a_2 och deras omloppstider med T_1 och T_2, kan Keplers tredje lag skrivas

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \text{ eller } \left(\frac{2\pi a_1}{T_1}\right)^2 \cdot a_1 = \left(\frac{2\pi a_2}{T_2}\right)^2 \cdot a_2$$

Uttrycken inom parenteserna i sista likheten betyda medelhastigheterna v_1 och v_2.

För en godtycklig planet i solsystemet gäller alltså

$$v \cdot \sqrt{a} = \text{konstant} \qquad (2)$$

Om hastigheterna i (1) utbytas mot medelavstånden enligt (2), erhålles tydligen en annan form av symmetrilagen:

$$\sqrt{a_{-x}} \cdot \sqrt{a_{+x}} = a_0 \qquad (3)$$

Prövningen av detta samband medelst siffrorna i tabell I ger uttrycken:

$$\sqrt{a_{-2}} \cdot \sqrt{a_{+2}} = \sqrt{22{,}8 \cdot 287} = 81{,}0$$
$$\sqrt{a_{-3}} \cdot \sqrt{a_{+3}} = \sqrt{14{,}95 \cdot 449} = 81{,}7$$
$$\sqrt{a_{-4}} \cdot \sqrt{a_{+4}} = \sqrt{10{,}8 \cdot 591} = 79{,}8$$
$$\sqrt{a_0^2} = \sqrt{77{,}8^2} = 77{,}8$$

De fyra produkterna skilja sig med några procent från medelvärdet (80,1). Symmetriaxeln synes även här ligga något utanför Jupiters bana.

Merkurius bana kan icke prövas medelst symmetrilagen (1) och (3), medan den icke har någon observerad partner. En sådan skulle, om en existerar, befinna sig utanför Plutos bana på ett avstånd från solen, som framgår av (3) enligt räkningen $\sqrt{5{,}8}\,10^5 \sqrt{a} = 80{,}1 \cdot 10^{10}$. Man får $a = 1110 \cdot 10^{10}$ m. Som bekant anse många forskare, att en eller flera planeter finnas utanför Pluto.

Planeten Saturnus har icke heller någon partner i symmetrilagens mening. Om en sådan funnes, skulle dess solavstånd enligt (3) vara $4{,}6 \cdot 10^{10}$ m och dess hastighet enligt (1) $1{,}72 \cdot 10^4$ m/s. Titius och Bodes bekanta regel talar även om en sådan planet med ett solavstånd på $2 \cdot 10^{10}$ m, »asteroidersättaren».

3. Den allmänna lagen för planeternas fördelning

Efter publiceringen av symmetrilagen år 1952 konstaterade författaren, att ett allmännare samband mellan planeternas medelhastigheter existerar, av vilket symmetrilagen framstår som ett enkelt

specialfall. Denna lag ger större kontrollmöjligheter än symmetrilagen Den visar även vilka planetbanor som äro möjliga, om två av systemets banor äro kända. Den ger slutligen den oväntade och intressanta upplysningen, att relationen mellan planetbanorna domineras av små, hela tal

Den allmänna lagen för planetfördelningen, skriven med avseende på medelhastigheterna för två godtyckliga planeter på olika sidor om Jupiter, lyder

$$v_{+x} \cdot v_{-y} = v_0^2 \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad (4)$$

Skriven för medelavstånden till solen lyder den (jämf ekv. 2):

$$\sqrt{a_{+x}}\sqrt{a_{-y}} = a_0 \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (5)$$

Här betyda som förut x och y numren på två planeter, vilka som helst den ena $(+x)$ utanför, den andra $(-y)$ innanför Jupiter. Denna lag skiljer sig tydligen från symmetrilagen därigenom, att de båda numren x och y ej längre behöva ha samma talvärden. För att pröva lagen kan man därför använda två banor, vilka som helst, på ömse sidor om Jupiter. Gör man dylika osymmetriska (eller symmetriska) inplaceringar i formlerna (4) eller (5) för planetbanor två och två, skall alltid hastighetsbråket $\frac{v_{+x} \cdot v_{-y}}{v_0^2}$ ha samma värde som kvadratroten ur motsvarande indexbråk, dvs. $\sqrt{\frac{y}{x}}$. Avståndsbråket $\frac{\sqrt{a_{+x} \cdot a_{-y}}}{a_0}$ skall ha samma värde som indexbråket $\sqrt{\frac{x}{y}}$. För kontrollen har man alltså möjlighet att använda ett rätt stort antal (16 st.) av varandra oberoende kombinationer, då ju de kända huvudplaneterna äro 8, sedan Jupiter och »asteroidersättaren» frånräknats. Om banorna väljas symmetriskt, får indexbråket värdet 1, och den allmänna lagen (4) och (5) övergår till symmetrilagen (1) och (3).

Prövningen av lagen (4) och (5) är utförd i tabell II. I kolumn 5 finnas hastighetsbråkens värden uträknade för alla möjliga indexkombinationer x och y på ömse sidor om jupiterbanan; $v_0^2 = 1{,}65$, se symmetrilagen. I kolumn 6 återfinnes kvadratroten ur motsvarande indexbråk. Talen i kolumnerna 5 och 6 skola enligt (4) överensstämma med varandra för varje indexkombination, dvs. i varje horisontalrad Sådan överensstämmelse i samtliga horinsontalrader utgör alltså ett bevis för riktigheten av den allmänna fördelningslagen (4). Samstämmigheten mellan talen i kolumnerna 5 och 6 är påtaglig genom hela planetsystemet. Avvikelserna hålla sig mestadels under 2 % men stiga här och var till omkr. 3 %. Detta visar att fördelningslagen (4

Tabell II

3	4	5	6	7	8	9	10
v_{+x}	v_{-y}	$\frac{v_{+x} \cdot v_{-y}}{{v_0}^2}$	$\sqrt{\frac{y}{x}}$	a_{+x}	a_{-y}	$\frac{\sqrt{a_{+x} \cdot a_{-y}}}{a_0}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$
0,960	1,72	1,00	$\sqrt{\frac{1}{1}}=1{,}00$	143	44,6	0,996	$\sqrt{\frac{1}{1}}=1{,}00$
0,960	2,44	1,42	$\sqrt{2}=1{,}41$	143	22,8	0,714	$\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}717$
0,960	2,98	1,73	$\sqrt{3}=1{,}73$	143	14,95	0,578	$\sqrt{\frac{1}{3}}=0{,}579$
0,960	3,50	2,03	$\sqrt{4}=2{,}00$	143	10,8	0,491	$\sqrt{\frac{1}{4}}=0{,}500$
0,960	4,79	2,79	$\sqrt{8}=2{,}83$	143	5,8	0,360	$\sqrt{\frac{1}{8}}=0{,}364$
0,680	1,72	0,710	$\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}707$	287	44,6	1,414	$\sqrt{\frac{2}{1}}=1{,}414$
0,680	2,44	1,00	$\sqrt{1}=1{,}00$	287	22,8	1,01	$\sqrt{\frac{2}{2}}=1{,}00$
0,680	2,98	1,23	$\sqrt{\frac{3}{2}}=1{,}23$	287	14,95	0,819	$\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}817$
0,680	3,50	1,44	$\sqrt{\frac{4}{2}}=1{,}41$	287	10,8	0,695	$\sqrt{\frac{2}{4}}=0{,}707$
0,680	4,79	1,97	$\sqrt{\frac{8}{2}}=2{,}00$	287	5,8	0,510	$\sqrt{\frac{2}{8}}=0{,}500$
0,542	1,72	0,565	$\sqrt{\frac{1}{3}}=0{,}578$	449	44,6	1,77	$\sqrt{\frac{3}{1}}=1{,}73$
0,542	2,44	0,800	$\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}817$	449	22,8	1,26	$\sqrt{\frac{3}{2}}=1{,}23$
0,542	2,98	0,980	$\sqrt{\frac{3}{3}}=1{,}00$	449	14,95	1,02	$\sqrt{\frac{3}{3}}=1{,}00$
0,542	3,50	1,15	$\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}16$	449	10,8	0,868	$\sqrt{\frac{3}{4}}=0{,}865$
0,542	4,79	1,57	$\sqrt{\frac{8}{3}}=1{,}63$	449	5,8	0,636	$\sqrt{\frac{3}{8}}=0{,}612$
0,474	1,72	0,494	$\sqrt{\frac{1}{4}}=0{,}500$	591	44,6	2,02	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2{,}00$
0,474	2,44	0,700	$\sqrt{\frac{2}{4}}=0{,}707$	591	22,8	1,45	$\sqrt{\frac{4}{2}}=1{,}41$
0,474	2,98	0,856	$\sqrt{\frac{3}{4}}=0{,}866$	591	14,95	1,17	$\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$
0,474	3,50	1,00	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1{,}00$	591	10,8	1,00	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1{,}00$
0,474	4,79	1,38	$\sqrt{\frac{8}{4}}=1{,}41$	591	5,8	0,730	$\sqrt{\frac{4}{8}}=0{,}707$

återger den astronomiska verkligheten på ett otvetydigt sätt, även om lagen icke är av samma exakta karaktär som exempelvis de keplerska lagarna eller dessas grund, gravitationslagen.

Merkurius måste tilldelas nr —8 och icke —5, som man skulle kunnat vänta. Ges merkuriusbanan nr —5 bryter den sig såsom den enda i hela systemet ut ur överensstämmelsen. Planetbanor med nr —5, —6 och —7 äro icke besatta med kända planeter.

Den allmänna formeln (5) är prövad i tabell II kolumnerna 7—10; a_0=80,1 (se symmetrilagen). Kriterium på att formeln är riktig utgör överensstämmelsen mellan siffrorna i kolumnerna 9 och 10.

III. En enkel strukturformel för hela planetsystemet

Om man i (5) sätter y=1, får man för en godtycklig *yttre* planet

$$a_{+x}=a_{+1}\cdot x \qquad (6)$$

Detta betyder, att solavståndet för de yttre planeterna skall vara en multipel av Saturnus solavstånd a_{+1}

Om man i (5) sätter in x=1, får man för en godtycklig *inre* planetbana med nr $-y$

$$a_{-y}=a_{-1}\cdot\frac{1}{y} \qquad (7)$$

Detta betyder, att solavståndet för de inre planeterna erhålles ur a_{-1} (asteroidersättarens solavstånd) genom dettas division med heltalen 2, 3 osv.

Med a_{+1}=143 och a_{-1}=44,6 som utgångspunkter skulle solavstånden enligt (6) och (7) bli följande (de verkliga avstånden äro angivna inom parentes): Saturnus 143; Uranus 286 (287); Neptunus 429 (449); Pluto 572 (591); asteroidersättaren 44,6; Mars 22,3 (22,8); Jorden 14,9 (14,9); Venus 11,2 (10,8); Merkurius 5,6 (5,8); Jupiter 79,8 (77,8).

Vid bedömningen av överensstämmelsen mellan beräknade och verkliga solavstånd bör man beakta, att a-värdena erhållits genom kvadrering av ekv:a (4) och (5) och att procentuella avvikelsen därigenom fördubblats. Då avvikelserna mellan teori och verklighet i tabell II i allmänhet ligga under 2 %, ligga de i ovanstående avståndsberäkning i allmänhet under 4 %. Detta har alltså en rent algebraisk förklaring.

Heltalsdirigerade relationer mellan planetbanorna, varom formlerna (4), (5), (6) och (7) bära vittnesbörd, synas egendomliga och oväntade vid mekaniska förlopp i ett gravitationsfält. Då emellertid lagarna i fråga stå i överensstämmelse med astronomiska fakta intill en avvikelse på 2 till 3 %, tvingas man antingen att förneka fördelningslagens giltighet på grund av dessa avvikelser eller att konstatera existensen av ett hittills okänt astrofysiskt problem, som väntar på ytterligare undersökning.

Litt om ski-hopping

Av lektor O. Lindstad, Oslo

Under fysikk-undervisningen i skolen forsöker vi gjerne å hente eksempler fra det daglige liv, og for mekanikkens vedkommende er det et felt som er både lærerikt og interessant for elevene, nemlig dynamikk som har med skihopping å gøre. I denne artikkel taes med en del stoff som kan forståes av elever i realgymnaset, men vi vil også gå inn på saker som krever mer matematikk enn det som behandles i skolen.

Tillöpet

Friksjon. En måling av friksjons-koeffisienten for glidning av ski mot snö kan elever lett klare å forstå og også utföre selv. En gutt trekker en annen (på ski) med konstant fart bortover en vannrett flate. I den snora han trekker i er festet en fjærvekt (som går til 5 kg), og den viser da hvor stor friksjonen er. Friksjons-koeffisienten er omkring 3 % på bra före.

Luftmotstand. Ved hjelp av et enkelt skoleforsök kan en lett undersöke hvordan luftmotstanden L er avhengig av hastigheten (forbigåes her). Det viser seg da at motstanden er omtrent proporsjonal med

Ovanstående bild, som välvilligt ställts till tidskriftens förfogande av Stockholms-Tidningen, visar den norske backhopparen Asbjörn Ruud i Hammarbybacken den 23 jan. 1949.

kvadratet av hastigheten v, og vi vil senere gå ut fra at det er tilfellet. Vi setter

$$L = kv^2 \tag{1}$$

hvor k er en størrelse som er avhengig av löperens størrelse og den kropsstilling han har, mer eller mindre nedböyd. Ved målinger i luftkanal eller på annen måte har man fått rede på k. Som passende verdi kan en sette $k = 0{,}025$ enheter når L angis i kg og v i m/s.

Hvordan hastigheten öker i tillöpet. Vi tar först den del av tillöpet som er rettlinjet. Kalles vinkelen med horisonten α, löperens tyngde P og friksjonskoeff. f, er resultanten av de virkende krefter lik

$$R = P\sin\alpha - Pf\cos\alpha - kv^2 = a - kv^2 \tag{2}$$

hvor a og k er konstanter. Bevegelses-ligningen er

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2) = (a - kv^2)\,ds \tag{3}$$

Herav får vi

$$v = \sqrt{\frac{a}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} \tag{4}$$

Regner vi med en viss normal-tyngde på löperen og videre med en viss normal verdi for f, vi kan av denne formel lage oss en tabell over hvordan hastigheten varierar med veien s for en valt vinkel α.

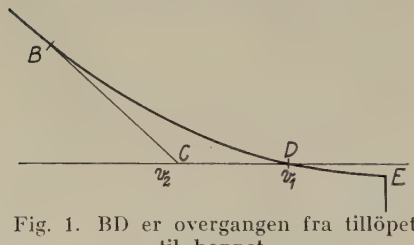


Fig. 1. BD er overgangen fra tillöpet til hoppet.

Litt mer innviklet er det når löperen kommer over i den krumme del av tillöpet, overgangen til hoppet, se fig. 1. Her må vi også regne med sentrifugaltrykkets virkning på friksjonen. Da sentrifugaltrykket er mv^2/R, får bevegelsesligningen nå denne form

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2) = [mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) - k'v^2]\,ds \tag{5}$$

hvor $k' = k + fm/R$. Her innsettes $ds = -Rd\alpha$, hvor R er krumningens radius, som for enkelhets skyld antaes konstant. Vi får da etter en del forenkling

$$\frac{d(v^2)}{d\alpha} - \frac{2Rk'}{m}v^2 = -2Rg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) \tag{6}$$

og denne lineære differensial-ligning kan videre löses på vanlig vis, så vi får hastigheten v uttrykt som funksjon av den variable vinkel α.

$$v^2 = v_0^2 \cdot e^{A(\alpha-\alpha_0)} + K[\varphi(\alpha) - e^{A(\alpha-\alpha_0)} \cdot \varphi(\alpha_0)] \tag{7}$$

hvor bokstavene har följende betydning:

v_0 og α_0 er hastighet og vinkel ved begynnelsen av overgangen

$$A=\frac{2Rk}{m}+2f, \quad K=\frac{2Rg}{1+A^2} \text{ og}$$
$$\varphi(\alpha)=A\sin\alpha+\cos\alpha+f\sin\alpha-fA\cos\alpha \tag{8}$$

Av særlig interesse er det å beregne den verdi v har ved slutten av overgangen (D på fig. 1).

Det kan ligge nær å sammenligne de to baner BC og BD pg fig. 1. Som vi forstår, vil både friksjon og luftmotstand gjöre at hastigheten i D er mindre enn den ville blitt hvis löperen hadde fortsatt rett fram til C. Kalles hastigheterne i D och C resp. v_1 og v_2, kan vi si at overgangen nedsetter slutthastigheten fra v_2 til v_1. Forskjellen v_2-v_1 vil vi kalle *overgangens dempning d.*

$$d=v_2-v_1 \tag{9}$$

På fig. 2 tenker vi oss att $\alpha_0=35°$ og $\alpha=6°$, og diagrammene viser hvordan dempningen er avhengig av hastigheten v_2, når krumningsradien R er henholdsvis 60 m, 80 m og 100 m.

Vi vil beregne hastigheten v_1 for en hoppbakke med disse karakteristiske störrelser: $R=70$ m, $\alpha_0=35°$, $\alpha=6°$. Videre er startplassens höyde over D (fig 1) lik 34 m. Av formel (4) finner vi at $v_2=23{,}1$ m/s. Av fig. 2 ser vi at $d=1{,}4$ m/s. Altså er hastigheten i D

$$v_1=(23{,}1-1{,}4)\text{ m/s}=21{,}7\text{ m/s}$$

Som vi ser, er dempningen ikke ubetydelig, og den har ganske stor innflytelse på hopplengden.

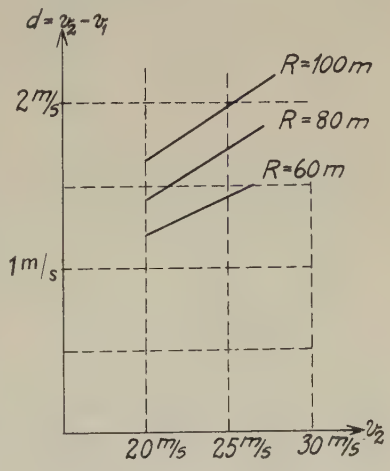


Fig. 2. Hvordan dempningen d er avhengig av hastiheten v_2.

Mens bevegelsen er akselerert hele veien fra starten til det overgangen begynner (B på fig. 1), vil akselerasjonen et sted på kurven BD bli null, og nedenfor blir bevegelsen retardert. Det punkt hvor retardasjonen begynner er selvsagt avhengig av tillöpets bygning.

Friksjonens innflytelse på hastigheten v_1 kan en undersöke ved hjelp av formlene (4) og (7). Sett at friksjons-koeffisienten synker fra 0,04 til 0,02. Det kan bevirke at hastigheten v_1 blir öket med over 0,5 m/s, og hopplengden blir mange meter lenger. Fra punktet D på fig. 1

har vi et stykke på noen få meter DE som er tilnærmet plant, hoppplanet, og ved hoppkanten E begynner svevet. Mens löperen tilbakelegger DE foregår satsen, og vi antar at hastigheten like för denne er lik den hastighet v_1 löperen hadde i D.

Svevet

Schweizeren STRAUMANN har for atskillige år siden foretatt målinger av luftens motstand mot små skilöper-modeller i luftkanal, og det er hans resultater som er utnyttet i beregningerne i denne artikel. Modellen ble gitt forskjellige stillinger, vistnok med rett kropp, med forskjellige vinkler med luftströmmens retning. På fig. 3 er K resultanten av luftens motstandskrefter på de forskjellige deler av kroppen. Videre er K_1 og K_2 de to komponenter langs kanalen og loddrett på den. Vi kan da sette

$$K=kv^2 \qquad K_1=k_1v^2 \qquad K_2=k_2v^2 \tag{10}$$

Fig. 4 viser tilnærmet hvordan k_1 og k_2 varierer med kroppens helning, 30°, 40°, 60° og 90°. Avstanden OD har vistnok en verdi på 0,04 å 0,05 (når v angis i m/s og K angis i kg). Ved mine beregninger er be-

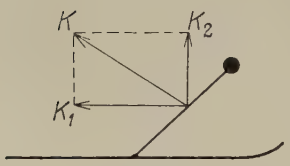


Fig. 3. Luftmotstanden under svevet.

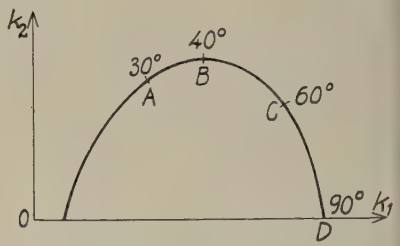


Fig. 4. Hvordan luftmotstanden varierer med kroppens stilling.

nyttet 0,04. For luftmotstanden spiller selvsagt også skienes stilling en rolle, men den er det her ikke tatt hensyn til. I moderne luftkanaler vil en kunne utföre målinger på modeller i naturlig störrelse. Da kan en variere stillingene på flere måter (knekkstil osv.), og resultatene vil bli sikrere enn ved bruk av små modeller.

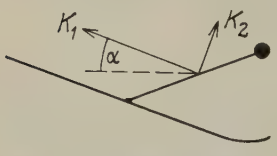


Fig. 5. Luftmotstanden under svevet.

På fig. 5 er tegnet en löper et sted i svevet, hvor α er vinkelen mellom horisonten og svevkurvens tangent. Kreftene K_1 og K_2 frembringer disse akselerasjoner (aritm. verdier):

Akselerasjon parallell banen	$a_1=\frac{K_1}{m}v^2$	
» normalt på banen	$a_2=\frac{K_2}{m}v^2$	(11)
» i horisontal retning	$a_H=a_1\cos\alpha-a_2\sin\alpha$	
» i vertikal »	$a_V=a_1\sin\alpha+a_2\cos\alpha$	

Vi tenker oss to nærliggende øyeblikk og kan da tilnærmet sette:

Horisontal hastighetstilvekst	$\Delta v_H=-a_H\cdot\Delta t$	
Vertikal »	$\Delta v_V=(g-a_V)\Delta t$	
Videre er	$\sin\alpha=\frac{v_V}{v},\ \cos\alpha=\frac{v_H}{v},$	(12)
	$v=\sqrt{v_H^2+v_V^2}$	
Forskyvning i horisontal retning	$\Delta x=v_H\Delta t$	
» i vertikal »	$\Delta y=v_V\Delta t$	(13)

Ved hjelp av disse formler kan vi arbeide oss fram fra punkt til punkt i svevkurven, og hvis tidsrommet Δt er valt så lite som f. eks. $\frac{1}{5}$ sekund, vil kurven bli bestemt med ganske bra sikkerhet.

Hastighetene under svevet. Vi vil se på resultatet av en del beregninger av hvordan hastigheten forandrer seg med lengden av svevet (forutsatt en viss kroppsstilling, ca 50 graders helning med svevkurven). Vi antar for enkelhets skyld at begynnelseshastigheten v_0 er vannrett.

Tabell I

Antall meter	40	50	60	70	80	90
v_0=20 m/s	24,2	26,1	27,9	29,7	31,2	32,8
22 »	24,8	26,4	28,0	29,6	31,1	32,6
24 »	25,5	26,8	28,2	29,6	31,0	32,4
26 »	26,4	27,4	28,5	29,7	31,0	32,3
28 »	27,4	28,1	29,0	30,0	31,1	32,2

Hvis vi i tabell I sammenligner tallene i en loddrett kolonne, ser vi følgende: Hastighetene ved 60 m, 70 m, 80 m og 90 m er praktisk talt uavhengig av hvor stor begynnelseshastigheten v_0 er. Denne egenskap ved svevet er meget vesentlig og forenkler de problemer som melder seg ved konstruksjon av skibakker.

Vi vil betrakte en tilsvarende tabell for hastigheter, når det ikke er luftmotstand.

Tabell II

Antall meter	50	60	70	80	90
v_0=20 m/s	29,0	31,5	34,0	36,2	38,3
22 »	29,7	31,9	34,0	36,2	38,3
24 »	30,4	32,5	34,4	36,5	38,6
26 »	31,4	33,2	35,0	36,9	38,8
28 »	32,5	34,2	35,8	37,3	39,3

Hvis vi i tabell II sammenligner tallene i en loddrett kolonne, finner vi atskillig större variasjon enn i tabell I.

Sammenligner vi videre tilsvarende tall i de to tabeller, finner vi den innflytelse luftmotstanden har på hastigheten. Særlig er det påfallende stor forskjell for de største verdier av v_0, se f. eks. på nederste tall lengst til höyre, henholdsvis 32,2 og 39,2. Som en forstår betyr denne reduksjon av slutthastigheten (på grunn av luftens motstand) en stor fordel når det gjelder å klare nedslaget.

Svevkurver for forskjellig slags stil. Normalkurven. Vi vil sammenligne svevkurvene for en hopplöper med forskjellig kroppsvinkel og benytter oss som för av de konstanter som fremgår av Straumanns målinger. Ved en vinkel på ca 50° vil svevkurven omtrent falle sammen med kurven for svev i luftomt rom. (Det antaes her at skiene er parallelle med banen.) Er vinkelen mindre, ligger kurven höyere. Antagelig vil en vinkel på ca 35° være den gunstigste. Er vinkelen större enn 50° ligger kurven under den som svarer til lufttomt rom. Antagelig faller kurven for lufttomt rom noenlunde sammen med svevkurven for en middels flink löper, og vi vil derfor betrakte den som en *normalkurve*.

Hvordan en kan regulere sin stilling under svevet. Når löperen farer ut fra hoppet, vil skiene en ganske kort tid tilnærmet beholde den retning de har. Men da svevkurven böyer av nedover, begynner luften å presse på skienes underside. Denne kraft går nedenfor det felles tyngdepunkt for mann og ski og gir altså et dreiemoment forover. Men luftens motstand mot löperens kropp angriper ovenfor tyngdepunktet og forsöker altså å dreie bakover. Hvilket moment som skal få overtaket, avhenger av kroppens og skienes stilling i forhold til svevkurvens tangent på det sted som vi betrakter. Det gjelder da for löperen å regulere både skienes og kroppens stilling slik at det samlede dreiemoment gir dreining forover. Og dette moment må ha en passende störrelse, slik at skienes og kroppens vinkler med svevkurvens tangent holder seg nær konstant under hele svevet, se fig. 6.

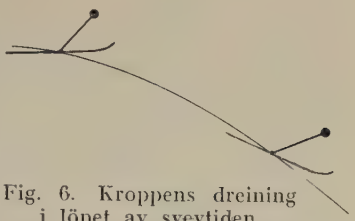


Fig. 6. Kroppens dreining i löpet av svevtiden.

Like för nedslaget inntreffer, gjelder det for löperen å rette opp kroppen, dvs. sörge for at vinkelen mellom kropp og svevkurve blir ca 90°. Dette kan han få til ved hjelp av luftens motstand. Forsöker nemlig löperen å dreie kroppen bakover, vil automatisk tuppa gå ned (reaksjons-dreining), og da vil skienes vinkel med kurven bli mindre. Av de to dreimomenter som ble nevnt foran, vil nå det som virker bakover komme til å få overtaket, dvs. kroppen rettes opp. En slik manövrering kan også av og til være nödvendig tidligere under svevet, hvis en merker at stillingen er feil.

Det er forresten også en annen regulering löperen kan utföre hvis han vil forandre sin stilling under svevet. Ved hjelp av armsvingninger i en dreieretning kan han få kroppen til å utföre en reaksjonsdreining i motsatt retning.

Sats

Sett at en mann med ski på bena står i ro på et gulv. Så hopper han rett opp, og det viser seg at skiene blir löftet omtrent 20 cm til værs ved spranget. Kalles hastigheten av tyngdepunktet for mannen like etter at skiene er löftet fra underlaget v_0, har vi $v_0 = \sqrt{2gh} = 2$ m/s. Hvis hastigheten på hoppet för satsen er 20 m/s og hopperen satser på en slik måte, vil utgangsretningen for svevet bli hevet en vinkel α, bestemt ved formelen tg $\alpha = 0{,}1$, se fig. 7

For å se virkningen av denne sats kan en konstruere de to svevkurver, uten sats og med sats, og da for enkelhets skyld se bort fra luftmotstand.

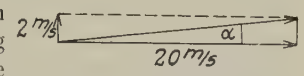


Fig. 7. Loddrett sats.

Vi finner at det blir en meget stor forskjell i hopplengde, kanskje 10 meter ved et 50 meters hopp. (Hvor stor denne forskjell vil bli, er avhengig av vinkeln mellom unnarennet og svevkurven ved nedslaget.) Den form for sats som er nevnt nå, kan vi kalle »*loddrett sats*», fordi den ekstra hastighet (f. eks. 2 m/s) som hopperen skaffer seg ved satsen, er loddrett på hopplanet.

Til satsen hörer også en annen bevegelse: Hopperen »kaster kroppen framover», slik at han raskt skaffer seg en gunstig vinkel mellom kropp og svevkurve. (En misforståelse, som vistnokk ikke er så sjelden blant hoppere, er at en på denne måten også oppnår en större fart. Det er selvsagt ikke tilfellet.) Denne del av satsen som går ut på å gi kroppen en gunstig stil under svevet, kan en kanskje kalle »*stil-*

sats». Dens oppgave er å utnytte best mulig den aero-dynamiske »oppdrift», som skyldes luftmotstanden (se foran).

I praksis ville det være bra om en kunne klare å tillfretsstille begge krav til satsen. Det er imidlertid vistnok vanskelig å realisere. Det gjelder da å blir klar over hvilken av de to sats-former som en bör konsentrere seg om under de forskjellige forhold.

I relativt små bakker, hvor det er tale om hopplengder på 20—40 meter, er hastighetene så små at luftmotstanden spiller en nokså liten rolle. Det vil derfor ikke være så vesentlig for hopplengden om vinkelen mellom kropp og svev er litt större eller mindre. Her bör en derfor fremheve betydningen av den loddrette sats.

Jo större bakken er, desto större betydning får stil-satsen. Og i kjempebakkene aller mest, cfr. den såkalte *finne-stil*, hvor hopperen går nesten »rett ut fra hoppet».

Sett nå at to hoppere har samme fart på hoppet og oppnår samme lengde. Vi antar at den ene har ren stil-sats, mens den andre bruker en kombinert sats. Som vi forstår, vil svevkurven hos den förste få et flatere forlöp enn hos den annen. Vinkelen mellom unnarennet og svevkurven blir derfor mindre ved nedslaget. Derfor blir trykket mindre og det er en fordel, når det er tale om å stå eller stupe.

Nedslaget

Om det skal bli et stort eller lite trykk ved nedslaget avhenger av hastighetens komponent normalt på unnarennet. Kalles slutthastigheten V og vinkelen mellom svevkurven og unnarennet β, er normalkomponenten

$$v = V \sin \beta \tag{14}$$

I vanlige bakker er v antagelig noe omkring 6 m/s. En nærmere undersökelse av dette må kunne foretaes ved filmning av nedslaget.

Vi vil foreta en vurdering av det trykk T som löperen blir utsatt for ved nedslaget. Ved kne-böyningen senkes tyngdepunktet et stykke s, som vi antar er 0,4 m. Kalles mannens tyngde P og unnarennets vinkel med horisonten α, er komponenten normalt på bakken $P \cos \alpha$. Vi antar at löperen »fjærer» så lett at en kan se bort fra energitap ved stöt. (At skiene stöter mot bakken har ikke noe å si.) Vi kan derfor sette

$$(T - P \cos \alpha)\, s = \tfrac{1}{2}\, m v^2 \tag{15}$$

Er f. eks. $P = 80$ kg, $v = 6$ m/s og $\alpha = 35°$, finner vi at trykket blir noe over 400 kg. Nå er vi normalt vant til å tåle trykket av vår egen vekt P, så det er egentlig forskjellen $T - P$ som interesserer ved nedslaget.

Som vi ser, er dette tilleggstrykk tilnærmet proporsjonalt med kvadratet av hastigheten v (normal på unnarennet). Måltallet for v^2 vil vi derfor betrakte som karakteristisk for trykket og kaller det *trykktallet*. Ved de største trykk man klarer stående er trykktallet antagelig omkring 50, mens trykktallet 30 betegner et nokså lett nedslag.

Av (14) og (15) ser vi at trykket (tilleggstrykket) er proporsjonal med både V og sin β. Da vinkelen β gjerne er nokså liten, f. eks. 10°, innser vi at bare 1 grads forandring vil spille en meget stor rolle for trykket. Dette viser tydelig at konstruksjonen av en hoppbakke ikke kan utföres på slump. Nå kan man heldigvis i noen grad regulere trykket hvis det er blitt for stort (eller for lite) ved å forandre hopplanets helningsvinkel, og det benytter man seg også av i praksis.

Et rimelig krav til en hoppbakke er at den bygges slik at trykket ikke vokser med hopplengden. Av (14) ser vi at sin β da må være omvendt proporsjonal med V. For å oppnå det må en sörge for at unnarennets vinkel med horisonten vokser litt med avstanden fra hoppet. Den del av unnarennet hvor nedslagene finner sted bör m. a. o. ikke være rett, noe som dessverre ofte synes å være tilfellet, hvis en skal dömme etter skibakkenes profiltegninger.

Overgangen

Når nedslaget er vel overstått, möter löperen snart en ny oppgave, nemlig å klare overgangen. I en större bakke har denne en krumningsradius på f. eks, 100 meter. Hvis farten her er 30 m/s, blir det et sentrifugaltrykk som er mv^2/R=ca 70 kg, altså et tillegg som er omtrent lik löperens egen vekt. Dette tilleggstrykk kan vi også opfatte som en kraft fra underlaget på löperen. (Aksjon=reaksjon.) Det gjelder nå å skaffe seg en stor understöttelsesflate forat ikke kraften skal få så stort dreiningsmoment at den kaster löperen overende. Derfor holder han det ene benet litt foran det andre. På profiltegninger av bakker ser det ut til at overgangen er konstruert med *konstant* krumning, men det er neppe heldig, da det nevnte trykk i så fall vil opptre plutselig. En *gradvis* forandring er bedre, og det oppnår en ved å lage en overgang, först med stigende, så med avtagende krumning mot den flaten hvor löperen bremser og dermed avslutter sin prestasjon.

Några synpunkter på realgymnasiets dynamikkurs

Av lektor Torbjörn Ljunggren, Stockholm

I en tidigare artikel i denna tidskrift (*38*, 1955, 253) har författaren behandlat en speciell fråga i vårt realgymnasiums dynamikkurs: hur och i vilken utsträckning skall tröghetskrafter införas vid problemlösningen? Detta är på intet sätt det enda problem, som möter, när man vill metodiskt och innehållsmässigt avväga just mekanikkursen. Möjligen kan det hävdas, att just detta delproblem utgör en lämplig inkörsport till hela problemkomplexet. Ett sätt att turnera frågan om tröghetskrafternas introduktion är att säga att med hjälp av dem kan man attackera en rad problem, där eleverna ej kan bringas att förstå annat än ett rent statiskt betraktelsesätt. Men när man är tvungen att gå denna väg utan att ge eleverna en inblick i ett dynamiskt resonemang, måste läget sägas vara pedagogiskt mindre lyckligt. Kursen avsnöres med en rent artificiell gräns, och detta kan återverka på elevernas betraktelsesätt och vetande, så att ett senare fördjupande av vetandet försvåras.

Den kurs i egentlig dynamik, som våra realstudenter läst, är nämligen verkligen liten. Tillåt mig erinra om följande. För ett punktsystems rörelse kan man ur Newtons rörelseekvationer härleda tre samband, där de inre krafterna är eliminerade: lagen om tyngdpunktens rörelse (eller satsen om rörelsemängden), energiintegralen samt lagen om rörelsemängdsmomentet. Är systemet stelt, räcker dessa ekvationer, men ur en enda av dem kan vanligen ej en god beskrivning av rörelsen erhållas. I vår skolkurs ges emellertid för närvarande en härledning endast av energiintegralen (vanligen dessutom i ett specialfall, som ej ger eleverna en klar bild av det generella i resultatet). De risker, man genom denna inskränkning löper i undervisningen, skall här belysas med ett par exempel.

Vi studerar först ett problem givet i studentexamen i januari 1945 (ex. nr 2):

> En trådrulle har kommit in under en möbel. Trådrullens ändytor äro cirkulära med diametern 3,0 cm, och den innehåller så mycket tråd att de yttersta varven ha diametern 2,4 cm. Någon har fått fatt i den fria trådändan och försöker få fram trådrullen genom att draga i trådändan. Trådändan löper in på rullens undersida; den ligger i rullens mot axeln vinkelräta symmetriplan och bildar

en viss vinkel med det horisontella golvet. Angiv inom vilka gränser denna vinkel måste ligga för att trådrullen vid dragningen skall närma sig till den dragande.

Den lösning, som tydligen föresvävat problemförfattaren (och som det inte alls är svårt att locka ur eleverna), är denna. Tages momenten kring en axel genom A, kommer endast den kraft, varmed man drager i tråden, att ha ett från noll skilt moment. Allteftersom den punkt B, där denna krafts verkningslinje skär horisontalplanet, ligger på ena eller andra sidan om A, kommer rullen att rulla åt ena eller andra hållet.

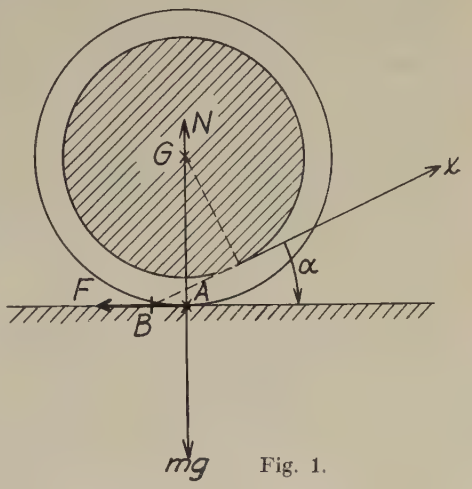


Fig. 1.

Detta kan emellertid ej vara hela sanningen. För det första får man ej utan vidare antaga, att A är en fix punkt; man kan ej a priori utgå från, att glidning ej inträffar. Det måste därför utredas, om lagen om rörelsemängdsmomentet är applikabel i sin enkla form här. För ett punktsystem med massorna m_k, läge- och hastighetsvektorerna $\bar{r}_k$ resp. $\bar{v}_k$ $(k=1,2\ldots N)$ lyder ifrågavarande sats:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k \times \bar{v}_k = \bar{M} \tag{1}$$

där $\bar{M}$ är de yttre krafternas moment med avseende på den fixa punkten origo. Om man här parallellförflyttar till ett rörligt koordinatsystem med origo i A och tar hänsyn till A:s hastighet $\bar{v}_A$, kommer ekv. (1) att ersättas av

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k \times \bar{v}_k + \bar{v}_A \times \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k = \bar{M} \tag{2}$$

där alltså vektorer och moment hänför sig till punkten A. Införes här tyngdpunktens hastighet $\bar{v}_G$ och systemets samlade massa m, får andra termen i vänstra ledet i ekv. (2) formen $m\bar{v}_A \times \bar{v}_G$. Skall ekvationen bestå i sin ursprungliga form, måste denna produkt bli

noll, dvs. antingen måste A vara en fix punkt ($\bar{v}_A = 0$) eller också sådan, att dess hastighet är parallell eller antiparallell med tyngdpunktens.

I det problem vi studerar är alltså ekvationen användbar, vare sig trådrullen glider eller ej. Men vad ekvationen ger besked om är endast åt vilket håll rotationen kring A sker. Och eleven använder en ekvation utan att vara varse, att dess användbarhet över huvud taget behöver ifrågasättas. Det *kan* leda till ödesdigra misstag i andra fall där motsvarande förenkling ej är berättigad.

Eftersom problemet, så länge glidning ej kan uteslutas, har två frihetsgrader, måste man använda ytterligare en ekvation för problemets lösning, lämpligen lagen om tyngdpunktens rörelse. Men då ser man, att om

$$x \cdot \cos \alpha > F \tag{3}$$

(beteckningar, se fig. 1), måste tyngdpunkten röra sig åt den dragandes håll, alldeles oberoende av hur rotationen kring A sker. Detaljdiskussionen lämnas åt den intresserade läsaren att själv genomföra; problemet är ganska analogt med det som ofta behandlas, och i vilket man studerar en rotationssymmetrisk kropp, som rullar och/eller glider längs ett strävt lutande plan. (Se t. ex. lektor Lindstads Veiledning i Mekanikk for fysikklærere i realgymnasiet, pp. 27—33.) Det svar, som vanligen brukas ges på den nu studerade uppgiften, är alltså riktigt endast om olikheten (3) ej är uppfylld.

Ett andra problem, som här skall tas upp till behandling, är en variant till problem nr 3 i januariskrivningen 1954:

> Ett homogent och jämntjockt och fullkomligt böjligt rep ligger med sin ena hälft rakt utsträckt på ett horisontellt, högt bord, under det att den andra hälften hänger fritt och lodrätt genom ett i bordet befintligt hål, vars diameter är något större än repets. Repet hålles till en början i detta läge men släppes sedan utan begynnelsehastighet. Hur stor är repets hastighet, då dess sista del just lämnat bordsytan? Repets längd är 100 cm. Från friktion bortses. Enkel figur erfordras.

Så som problemet här formulerats, är det enligt min mening otadligt. Men ibland förekommer i exempelsamlingar en variant, där man låter repet löpa över bordskanten. För att få enkla siffror låter vi dessutom rörelsen starta, när y (beteckningar, se fig. 2) är mycket litet. Frågar man nu efter sluthastigheten, så ligger i den frågeställningen en förmodan, att repet, när det lämnar bordet, rör sig vertikalt och translatoriskt. Det är i varje fall ingen svårighet att bibringa eleverna i en sista ring den uppfattningen, och ur ett omedelbart uppställbart

energisamband får de ett värde på hastigheten. Men här föreligger då ett exempel på samma slags tankefel som i förra fallet; man behandlar ett problem med två frihetsgrader som om det bara hade en. Man skall betänka att energiintegralen (eller motsvarande för de fall, där icke konservativa krafter figurerar) egentligen endast ger upplysning om varifrån energien kommer och vart den tar vägen. Den ger däremot ej alltid klart besked om den mekanism, som skall möjliggöra överförandet.

Låt oss studera tyngdpunktens rörelse. För dennas koordinater $(\xi;\ \eta)$ gäller med beteckningar enligt fig. 2:

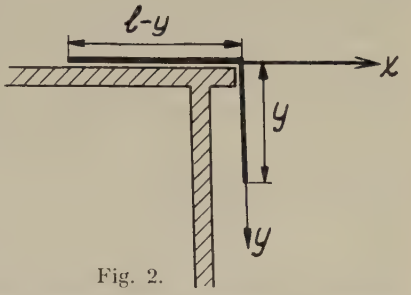


Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{(l-y)^2}{2l}\\ \eta &= \frac{y^2}{2l}\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Om nu den vertikala delen av repet skall ha rent vertikal hastighet, fås energisambandet

$$\frac{mgy^2}{2l} = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \qquad (5)$$

Fullföljes denna kinematiska utredning kommer man till kravet

$$\ddot{\xi} = \frac{gy}{l^2}(l-2y)$$

För att rörelsen skall vara möjlig, fordras alltså för $0 < y < \frac{1}{2}l$ en kraft, som accelererar tyngdpunkten åt höger; detta åstadkommes av reaktionen från bordskanten. Men när $l > y > \frac{1}{2}l$, skall kraften vara riktad åt vänster, och med det ensidiga tvång, som bordskanten utövar, kan detta villkor ej uppfyllas. Detta gäller, så länge friktionskrafterna ej införes i bilden. Men introduceras dessa, gäller energisambandet (5) ej längre.

En situation, där faror i detta avseende lurar, är när man endast använder energisamband utan att kontrollera vad sambandet om rörelsemängden medför. Att beslå ett studentproblem med den bristen är naturligtvis otänkbart. Men dilemmat märks t. ex. i uppgift nr 2 givet vårterminen 1932, där en ballistisk pendel presenteras. Författaren har tvingats att göra uppgiften överbestämd, eftersom det ena av de två uppställbara sambanden varit obekant för abiturienterna.

Måhända har denna betraktelse av två speciella examensuppgifter gjorts väl ingående, men ibland är ett konkret resonemang att föredraga framför ett mera abstrakt. Meningen har bl. a. varit att påvisa

den vinst, man skulle nå, om man i gymnasiekursen kunde inrymma åtminstone lagen om tyngdpunktens rörelse. Det borde vara möjligt. Övergången från en enstaka partikels rörelseekvation

$$m_k\bar{a}_k=\bar{F}_k+\sum_{i=1}^{N}\bar{F}_{ik} \tag{6}$$

($\bar{a}_k$=accelerationen, $\bar{F}_k$=yttre kraft på k:te partikeln, $\bar{F}_{ik}$=den kraft, varmed den i:te partikeln påverkar k:te) till den för hela systemet gällande

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\bar{a}_k=\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k=\bar{F} \tag{7}$$

kräver ju bara vetskap om lagen om aktion och reaktion. Den ytterligare förändringen till

$$m\bar{a}_G=\bar{F} \tag{8}$$

innebär samma medelvärdesberäkning som den, som krävs för att bestämma tyngdpunktens koordinater. Om till äventyrs övergången (7)→(8) skulle anses besvärlig, är redan presentationen av (7) en vinst. Tag t. ex. ett partikelsystem, där yttre krafter ej existerar eller kan försummas (stötsituationer!). Då fås ur (7), där $\bar{F}=0$, att

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\bar{v}_k=\text{konstant} \tag{9}$$

och begreppet impuls är omedelbart presentabelt med viktiga konsekvenser ej minst när det gäller kursen i atomfysik.

Att införa lagen om rörelsemängdsmomentet skulle däremot säkerligen bli avsevärt besvärligare, men visst ginge det, om man inskränkte sig till plana problem och använde en geometrisk metod i stället för räkning med vektorer. Kanske kan man säga här, att en del av svårigheten beror på att gymnasisterna ej får fullt klart för sig, att även momentet är av vektorkaraktär. Så vitt författaren har sig bekant, är det rätt många som när de på Tekniska högskolan skall läsa mekanik, finner det ganska besvärligt att »tänka om» på denna punkt. Man bör ju noga skilja på begreppen moment med avseende på en punkt och med avseende på en rät linje. I gymnasiekursen beräknar man väl uteslutande den senare sortens moment. Men likafullt talar man om momentpunkt i stället för momentaxel. Som en av eftergranskarna av de skriftliga proven i fysik i studentexamen har jag kunnat konstatera, att detta gäller genomgående. Det skulle faktiskt vara en fördel, om man lärde sina elever att använda beteckningen moment med avseende på en axel — när det i alla fall är fråga om den saken.

Därmed har mitt resonemang glidit över på mera formella frågor. Att formulera ett fysikaliskt problem på samma gång koncist och korrekt är sannerligen en konst, och man kan nog spörja, om ens någon exempelsamling är tadelfri i detta avseende. Genom den hårda kontroll, som studentproblemen utsatts för vid tillblivandet, kommer dock samlingen av dem rätt nära idealet. Men även på denna magra äng kan en idog botanisör hitta en och annan blomma. Ett vettigt krav är väl, att alla omständigheter, som inskränker det framräknade resultatets giltighet, i görligaste mån redovisas i texten. Men tag då som exempel uppgift nr 8 i januariskrivningen 1954! Det gällde där att beräkna den tid, det tog för en elektron att röra sig från katod till anod i ett elektronrör. Enligt min mening borde det i texten ha angivits, att störande magnetfält saknades. Lägger man in ett sådant, derangeras ju elektronernas bana högst avsevärt, och detta återverkar på den tid som åtgår. Om man åskådliggör elektroderna som plattorna i en plattkondensator[1] (spänning U, avstånd d), kallar elektronens massa och laddning m resp. e samt inför ett homogent magnetiskt fält B parallellt med plattorna, visar en enkel räkning, att elektronen över huvud taget icke kommer fram, om

$$B \geqq \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

Ett så väsentligt inskränkande antagande bör man inte tiga med, även om innebörden av det för tillfället går över elevernas horisont.

Ett annat krav är, att man inte i en uppgift implicit förutsätter existensen av det, som man explicit sagt sig ämna försumma. Där kan man som exempel ta den mycket trevliga uppgiften nr 2 från marsskrivningen i år (se detta häfte sid. 145). Där säger man på samma gång, att friktionen skall försummas, och att systemet så småningom kommer i jämvikt. Hur sant detta än må vara i praktiken, strider dock påståendena mot varandra; rationell mekanik ställer ibland krav, som kan synas verklighetsfrämmande!

Måhända tycker en del läsare, att detta är ett onödigt sysslande med petitesser. I synnerhet i ljuset av det sista exemplet, som onekligen rör en bagatell. Men man kan lägga ett annat perspektiv på det som här diskuterats. Många har yttrat sig i debatten om vad fysikkursen på gymnasiet skall innehålla. Låt mig här citera några rader ur professor v. Friesens föredrag vid den nordiska kongressen för lärare i matematik, fysik och kemi i Aarhus i aug. 1951: »Tiden är enligt min mening mogen för en genomgripande omarbetning av

[1] Då får man det homogena elektriska fält som uppgiften fordrade.

kursen. Nya sammanhang ha uppdagats som ge en bättre helhetssyn. I en ny kurs måste grundprinciperna och de generella sammanhangen betonas långt mer än som nu sker.» De principer och sammanhang varom här är tal kommer man fram till genom att logiskt bearbeta resultaten av en serie experiment. För att detta skall vara möjligt, måste man ha tillgång till den ordning och reda, som fasta kunskaper i mekanik och dess begreppsbildning skänker. Brister i nuvarande kursuppläggning måste därför påpekas, och möjligheter till förbättringar diskuteras. Den omarbetning, varom citatet ovan siar, kommer säkerligen, men den måste föregås av en debatt, där olika intressen och åsikter får tillfälle att brytas mot varandra. Författaren är väl medveten om att detta inlägg ingalunda uttömmande eller felfritt behandlar ens de detaljfrågor, som det tager upp. Han välkomnar kritik!

Notiser

Ett kaströrelseproblem

Vid beräkningar i skolan av en projektils rörelse måste man givetvis bortse från luftens motstånd. Vid större hastigheter är ju dess inflytande avsevärt, och erhållna resultat avvika mycket från verkligheten. Kapten H. Torfgård belyser detta i anslutning till uppg. 3 i studentskrivningen nov. 1955:

»Ett luftvärnsbatteri (i O) är inställt för att skjuta spärreld mot ett föremål, så att detta träffas (i P) på ett vågrätt avstånd av 4000 m från batteriet och på en höjd av 6000 m. Projektilen befinner sig vid träffen i projektilbanans uppåtgående del. — Ett fientligt flygplan rör sig på en konstant höjd av 6000 m med en hastighet av 720 km/tim rakt mot batteriet på så sätt, att det sannolikt kommer att passera spärreldsläget. Var befinner sig flygplanet, då batteriet öppnar eld? Batteriets pjäser skjuter med en utgångshastighet av 1000 m/sek. Från luftmotståndet bortses. Tyngdkraftens acceleration kan antagas vara 10 m/sek².»

Problemet är att söka skjuttiden. Eftersom man skall bortse från luftmotståndet, användas formlerna för kastbanan i lufttomt rum:

$$x = t_s v_0 \cos \alpha; \quad y = t_s v_0 \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t_s^2 \qquad (1)$$

där t_s är skjuttiden, v_0 utgångshastigheten och α elevationsvinkeln.

Vid överslagsberäkningar kan man med ganska god noggrannhet använda sig av parabelbanan under följande förutsättningar: v_0 skall vara litet, helst ej över 200—250 m/s. Den punkt, för vilken beräkningarna skola göras, bör ligga i början av kastbanans uppgående

gren. Ju närmare bantoppen man kommer, desto större bli felen. Detta visar sig med önskvärd tydlighet i den givna uppgiften, om man jämför resultatet med praktiken.

Skjuttiden kan approximativt bestämmas med en av överste E. Hellström uppställd formel (som f. ö. kommer att införas i Skjutlära för armén):

$$t_s = \frac{840}{v_0} \cdot A_l \left(1 + \frac{A_l}{k}\right) \qquad (2)$$

där t_s är skjuttiden i sek, v_0 utgångshastigheten i m/s, A_l lutande avståndet i km, dvs. i föreliggande uppgift sträckan OP, och k en konstant beroende av projektilkalibern. För 7,5 cm lvkanon m/37 är $k=6$ och för 10,5 cm lvkanon m/42 är $k=9$.

Formeln är empiriskt uppställd med utgångspunkt från skjuttabellerna för 7,5 cm och 10,5 cm lvkanon och gäller med god noggrannhet för projektiler av icke allt för liten kaliber och på praktiskt användbara skjutavstånd.

Tillämpas formel (2) på uppgift 3, erhållas följande skjuttider: för 7,5 cm lvkan 13,3 sek och för 10,5 cm lvkan 10,9 sek. Enl. (1), dvs. utan hänsynstagande till luftmotståndet, erhålles skjuttiden 7,4 sek.

För en 7,5 cm lvkan medför det således att vid eldöppnandet flygplanets avstånd till träffpunkten (P) är i praktiken nära fördubblat, 2,7 km i st. f. 1,5 km. *H. Torfgård*

Cartesii dykare

Vanligen framföres denna klassiska kuriositet i form av en djävulsfigur av blåst glas, försedd med vederbörliga attribut — horn och svans. Den senare är en viktig detalj, emedan en öppning finnes just i svansspetsen. På ett eller annat sätt (variation i tryck eller temperatur) inför man så mycket vatten i dykaren, att den nätt och jämt flyter i vatten. Den inneslutes så i en helt vattenfylld glascylinder på fot. En tätt slutande gummihinna bindes över mynningen. Ett tryck med handen på hinnan pressar in vatten i dykaren, så att den sjunker; lättar trycket, flyter den ånyo upp.

En sådan dykare sjunker efter någon tid, när luften som inneslutits under hinnan, löses i vattnet. Lika fullt kan dykaren dock ofta demonstreras genom ett enkelt konstgrepp: man nyper i hinnan och drar den uppåt, tills dykaren flyter upp, släpper man hinnan, sjunker dykaren.

Enklaste sättet att förhindra att luft kommer in under hinnan torde vara att sänka det hela under vatten och där fästa gummihinnan genom en stark gummiring, klippt av en mc- eller cykelslang, ev. genom en konserveringsring. Ringen lindas flera varv, tills den ligger an hårt nog. En gummiring påsättes och avtages lättare än ett snöre.

Förbluffande enkelt kan man göra en passabel dykare av en tändsticka, antingen avklippt eller lagom belastad med pålindad, fin koppartråd och inlagd i en vattenfylld flaska, t. ex. en vichyvattenflaska, vars mynning tilltäppes med ett finger. Trycker man in fingerspetsen, pressas vatten in i träets porer, så att stickan sjunker för tillfället. En sådan sticka blir dock snart oduglig, vare sig den förvaras torr eller våt, och den kan vara rätt kinkig att belasta lagom. På grund av de anspråkslösa rekvisita förtjänar försöket dock att rekommenderas åt hemmalaboranter.

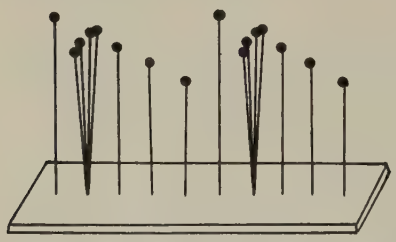
Bäst a sättet att visa dykaren är nog följande. I en stor flaska om t. ex. 800 cm^3 sänker man ned ett par vanliga blåsrörskolvar av något olika storlek. Sådana kan man f. ö. blåsa själv. De synas bättre och skiljas lättare åt, om de målas *inuti* »ballongerna» med två skarpa lackfärger. Utanpå anbragt färg påverkas betydligt av vatten. Flaskan fylles med vatten upp till halsen. I denna sätter man en gummipropp med ett centrumhål, vari en 10—15 cm lång glasstav kan skjutas ned och upp.

Nu kan man genom att först trycka in proppen något och sedan successivt skjuta ned glasstaven höja det inre trycket, tills först den ena och sedan den andra kolven sjunker. Det rådande trycket kan ungefär bedömas enligt Boyles lag, emedan vattenytan i rören är väl synlig. Äro kolvarna rätt trimmade, kan man efter behag få en av kolvarna eller båda att flyta eller sjunka, ja, t. o. m. kan man hålla en av dem svävande i vattnet. Genom att göra försöket med upp- och nedvänd flaska visar man, att ingen direkt stötverkan inverkar på kolvarnas rörelser.

Begagnar man den nu beskrivna anordningen, blir försöket bekvämt för läraren, kan lätt iakttagas av klassen och medger intressant och lärorik diskussion, särskilt om kolvarnas vikter äro kända.

Einar Wetterwik

Resonans



I en trälist, ungefär av dimensionerna 200 · 50 · 10 mm, intryckas ett antal pendlar av pianotråd med ca en mm diameter och längderna 160, 140, 120, 100, 80 mm, två och två lika långa. Avståndet mellan dem kan vara 20 mm. I den fria änden fastlödes en liten kullagerkula. Trälisten fattas i ena handen och en av pendlarna sättes i svängning. Resultatet är ganska förbluffande.

Hj. Trane

Kopparhalten i en 1-öring

Enligt kursplanerna för det nya gymnasiet skall undervisningen i kemi i R^{III} bl. a. omfatta »lätta kvalitativa och kvantitativa analyser med enkla räkneuppgifter». Denna bestämmelse innebär, åtminstone vad beträffar de kvantitativa analyserna en nyhet och en värdefull sådan. Kvantitativa försök, som belyser vissa satser eller avser vissa ämnens sammansättning har ju utförts redan tidigare både i realskolan och gymnasiet, möjligen också en eller annan kvantitativ analys, t. ex. en permanganattitrering. Formuleringen härovan vill jag tolka så, att vi uppmanas att förstärka det »kvantitativa» tänkandet genom ett ökat antal kvantitativa analyser, där sådana är möjliga, och vidare att ersätta lösandet av skrivbordskomponerade räkneuppgifter med beräkningen av egna försök med alla deras fel och förtjänster. För att vinna erfarenhet om möjligheterna att utföra sådana analyser har jag under det förflutna läsåret låtit en tredjerings kemiska laborationer väsentligen omfatta kvantitativa analyser i samband med kursen. Det har visat sig att det finns gott om arbetsuppgifter av detta slag. För det samlade materialet hoppas jag kunna redogöra i annat sammanhang; för dagen skall jag endast anföra ett exempel.

Det är givet att de rent gravimetriska analysmetoderna måste bortfalla såsom alltför tidsödande och alltför subtila. Upplösning, fällning, filtrering, tvättning torkning, föraskning av filter, fällningens glödgning och vägning (på analysvåg!) låter inte förena sig med en laborationstimme i veckan. Det måste således väsentligen bli titrermetoder som användes. Alldeles kan man inte undvara vågen men är då hänvisad till de enkla lärjungevågarna med en noggrannhet av $\pm 0{,}01$ g. Den på en sådan våg uppvägda substansmängden måste vara minst 1 g, helst större, för att analysen skall bli något så när tillförlitlig, men detta är alldeles för mycket för titrervätskor av gängse koncentrationer. Då får man dela upp substansen genom att lösa upp den till en viss volym och ta en alikvot del därav.

Som exempel på en kvantitativ analys anföres här bestämningen av kopparhalten i en 1-öring.

En ej alltför nött 1-öring väger 1,95—1,97 g; den kan således vägas med tämligen god noggrannhet. Det vägda myntet lägges i en erlenmeyerkolv (200 ml) och löses i 10 ml konc. salpetersyra med kolvens mynning täckt av en liten tratt. Efter avslutad upplösning, som endast kräver ca 10 minuter, värmes lösningen till svag kokning, så att all kvävedioxid avlägsnas. Tratten flyttas till en mätkolv på 250 ml, och kopparlösningen (jämte den olösta tennsyran) överföres kvantitativt till mätkolven, som sedan fylles med vatten till märket. Efter omblandning uttages med pipett eller noggrann mätcylinder 25 ml i en titrer-

kolv. Man tillsätter ungefär 1,5 g kaliumjodid och bestämmer den frigjorda jodmängden genom titrering med 0,1 M (=0,1 N) tiosulfatlösning (indikator stärkelse). Reaktionsformel

$$2\ Cu^{2+} + 4J^{-} \rightarrow 2\ CuJ + J_2$$

Reaktionen sker i svagt sur lösning. En överslagsberäkning visar att kopparlösningens syratiter är ungefär 0,2 M H^+, vilket förefaller kraftigt, så mycket mer som det är fråga om salpetersyra, som kan tänkas oxidera J^-. För att undersöka hur därmed förhåller sig, beskickades en flaska med kaliumjodid, fylldes till proppen med 4 M salpetersyra och förvarades vid rumstemperatur i två dygn. Syran var då endast svagt gulfärgad, 25 ml försattes med stärkelse och avfärgades av 0,2 ml 0,1 M tiosulfat.

För att för eleverna förenkla analysens beräkning kan man ange den viktsmängd fri jod i gram, som motsvarar 1 ml tiosulfatlösning och för övrigt hänvisa till reaktionsformeln här ovan. Men om detta anses alltför hjälpsamt, kan man ju utföra hela reaktionsföljden, som utan alltför stor svårighet till slutresultat ger

$$Cu^{2+} \rightarrow (\tfrac{1}{2}J_2) \rightarrow Na_2S_2O_3$$

Försöket är lätt, och på en två-timmars laboration hinner man dessutom med en hel del kvalitativa försök på koppar.

G. Starck

»Omvänd förbränning»

Ett rör av svårsmält glas (15—20 cm långt, 2—3 cm i diameter) fästes vertikalt i stativ. Lysgas (eller väte) ledes in i den övre ändan och antändes vid den nedre. Gasströmmen regleras så, att lågan där får tungor av några cm längd fladdrande kring mynningen. Syre från syrgastub föres medelst att smalt metallrör nedifrån in i gasen i röret. Syret brinner där inne med en vacker blå låga, som slocknar, då metallröret dras ut, men tänder sig, då det föres in igen.

Bertil Englund

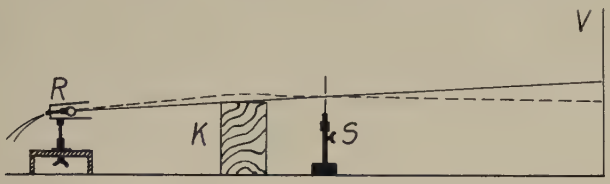
Den osynliga glasstaven

Försöket med glasstaven, som försvinner i vätskan, har blivit aktualiserat genom en notis av F. Hjerting i förra häftet av Elementa (sid. 39). Här ett enkelt och billigt sätt: tag ca 50 ml bensol i en 100-ml-bägare. Rör om med en glasstav och sätt undan för undan till nitrobensol, till dess att glasstaven blir osynlig! Man har då en vätskeblandning med samma brytningsindex som glaset i staven. Ungefär 40 ml nitrobensol behöves.

Bertil Englund

Refraktionen

Reuterlampen R (uden linse) sender lys hen mod skærmen S med en vandret spalte, således at der dannes et billede af spalten på væggen V. Afstandene RK, KS og SV er ca 1 m, 0,5 m, 1,5 m.



Nu flyttes klodsen K så meget til venstre, at den netop spærrer af for lyset, så spaltebilledet på væggen forsvinder. Der hældes lidt æter oven på klodsen. Æteren fordamper, og der sker brydninger af det lys, som passerer gennem æterdampene. Den punkterede stråle, som normalt rammer skærmen S lidt over spalten, bliver nu afbøjet nedad, så den netop passerer gennem spalten og hen til væggen, hvor spaltebilledet dukker frem.

Når sollys trænger ind i stadig tættere lag af jordens atmosfære, sker der brydninger på samme måde som i forsøgets æteratmosfære, og det bevirker, at himmellegemer iagttages højere oppe på himlen, end de i virkeligheden befinder sig. *Frode Hjerting*

Solens granulation

I en fladbundet skål, f. eks. en petrisskål, har man hældt paraffin til en højde på 1—1½ cm. Paraffinen er blandet med en smule fint aluminiumpulver. Man opvarmer skålen på en elektrisk varmeplade, så paraffinen netop er smeltet. Skålen stilles på bordet, og man iagttager, at der snart opstår et net af temmelig regelmæssige celler. I cellens midte stiger paraffinen og aluminiumpulveret til vejrs, medens det synker ned ved cellens vægge. Ved en passende lodret temperaturgradient bliver udseendet meget smukt. En celle vokser stadig i størrelse til en vis grænse, hvorefter den bliver mindre og tilsidst forsvinder.

Solens *granulation*, den ejendommelige mosaikagtige struktur, som ses på solens overflade ved benyttelsen af meget store kikkerter, menes at hidrøre fra en lignende celledannelse. De dybere lag af fotosfæren, hvor brinten er ved at blive ioniseret, er instabile, således at der fremkommer hvirvler. Disse hvirvelceller holder sig kun i nogle minutter; de er altså meget instabile. *Frode Hjerting*

Aktuellt

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll söndagen den 15 april sitt sedvanliga vårsammanträde på Universitetets fysiska institution. I styrelsen invaldes efter professor K. Lundmark, Lund, och rektor H. Holmgren, Skurup, som avböjt återval, lektorerna Sven Glad, Ängelholm, och Stig Andersson, Lund. Övriga styrelsemedlemmar omvaldes. Lektor Stig Andersson blev föreningens nye sekreterare. Ordf., lektor A. Leide, framförde föreningens tack till de avgående styrelsemedlemmarna samt till lektor B. Adell, som önskat lämna sekreterarskapet.

Ordet överlämnades sedan till läroverksadjunkten Malte Johansson, Halmstad, som i sitt föredrag »Några synpunkter på kursplanerna för matematik i realskolan» kritiskt granskade den flora av konstlade problem, som frodas i läroböckerna i matematik för realskolan. En stor del av detta material borde enl. talaren gallras ut och lämna rum för viktigare kursmoment, såsom enkla andragradsekvationer och en något utvidgad behandling av kvadratrötter. Tiden tillät tyvärr icke en så ingående diskussion av de i föredraget framförda intressanta synpunkterna, som föreningsmedlemmarna kunnat önska, utan denna måste inskränkas till ett minimum. Adjunkt Johanssons föredrag kommer emellertid att publiceras i tidskriften Pedagogisk Debatt.

Efter en paus med kaffedrickning i Fysicums lunchrum demonstrerade lektor Alf Heimer, Göteborg, Fymas optiska bänk, som föreföll att både ge vackra försöksresultat och vara enkel att använda.

Docenten A. Reiz, Lund, föreläste därefter över radioastronomi och gav en elegant framställning av några färska forskningsresultat från detta hypermoderna och ytterligt fängslande arbetsområde.

Slutligen framlade fil. lic. Nils Hansson, Lund, några synpunkter på nyutkomna läroböcker i astronomi och visade några hjälpmedel för astronomiundervisningen. Han lämnade även några trevliga förslag till övningsuppgifter i astronomi för läroverkens elever. Föredraget var över huvud taget av omedelbart pedagogiskt värde för fysiklärarna.

Firma P. A. Norstedt & Söner hade i samband med sammanträdet anordnat en utställning av hjälpmedel främst för matematik- och astronomiundervisningen. *Birger Adell*

Pedagogiska problem i skolmatematiken

har under vårterminen 1956 behandlats vid en serie seminarier vid Uppsala universitet. Seminarierna, till vilka initiativet togs av professor Lennart Carleson, rönte ett stort intresse från såväl aktivt verksamma lärare som studerande och stimulerade till diskussion.

Vid det första sammanträdet den 3 mars presenterade lektor Sixten Thörnqvist de nya gymnasiekurserna i matematik. Han påminde om

att dessa skall utgöra ett provisorium under ca 10 år och uppmanade lärarna att under denna tid samla erfarenheter och synpunkter att beaktas vid den senare utformningen av de mera definitiva kurserna.

Den 17 mars behandlade undervisningsrådet C. E. Sjöstedt geometriundervisningen i realskolan. Han framhöll lämpligheten av att utbreda geometristudiet över lång tid, vilket motiverar att man börjar så tidigt i realskolan, som nu sker. Han betonade de stora krav, geometriundervisningen ställer på läraren, och gav åtskilliga metodiska anvisningar. Då dock så många skiljaktiga meningar finns beträffande metodiken, framhöll inledaren, att man får räkna med en mycket differentierad praktisk utformning, beroende på lärarens personliga läggning.

Den 14 april gav lektor Karl Dagerholm synpunkter på funktionsläran i gymnasiet. Han rekommenderade bl. a. korrekthet i framställningen i så måtto, att sakförhållanden, som inte kan bevisas på skolstadiet, omnämnes såsom obevisade fakta och inte ges sken av att vara självklara. Som exempel gavs satsen om att en funktion är växande i ett intervall, om derivatan är positiv.

Det sista seminariet den 21 april ägnades svårigheterna vid övergång från skola till universitet. Fil. stud. Petter von Malmborg gav en livfull skildring av sina egna svårigheter vid matematikstudierna under det första universitetsåret. Han gav också en rad detaljerade förslag rörande omhändertagandet av nykomlingarna och uppläggningen av kurserna. Han uttryckte önskemål om att också universiteten redan i skolan bör ge information om vilka utbildningsvägar de kan erbjuda. Undertecknad gav slutligen några synpunkter som en universitetslärare kan lägga på det diskuterade anpassningsproblemet. Vid den följande diskussionen kom såväl från lektor Thörnqvist som från studenthåll konkreta förslag värda beaktande. *Bo Kjellberg*

Stipendier för kemistudier i Tyskland

Det tyska företaget Farbwerke Hoechst A. G. i Frankfurt am Main har till Ingeniörsvetenskapsakademiens förfogande ställt tre stipendier. Varje stipendium är avsett att möjliggöra för en svensk medborgare att studera kemi under två år vid universitet, teknisk högskola eller forskningsinstitut i Förbundsrepubliken Tyskland. Alla grenar av kemin och till kemin gränsande vetenskaper kunna komma ifråga.

Sökanden, som skall vara ogift, bör helst ha avlagt fil. kand.-examen eller civilingenjörsexamen. Studerande som avlagt dessa examina ha möjlighet att efter två års studier i Tyskland avlägga doktorsexamen där. Sökande bör vara beredd att börja studierna höstterminen 1956.

Närmare upplysningar kunna erhållas från Ingenjörsvetenskapsakademien, Box 5073, Stockholm 5. Ansökan skall insändas före 15 juni 1956.

Gradualavhandlingar[1]

Sven Gösta Nilsson, *On some Properties of Nuclear States*, Lund 1955 (sammanfattning av fyra arbeten i Phys. Rev., Zs. f. Physik och Dan. Mat. Fys. Medd. Disp. i Lund 26 nov. 1955. Opponenter: Docent Bengt Holmberg och Dr. Arthur Kerman (f. n. Köpenhamn).

Huvudarbetet i avhandlingen utgör en beräkning av de enskilda nukleontillstånden i ett starkt deformerat kärnfält. Medan kärnor med fyllda eller nästan fyllda skal (dvs. kärnor med neutron- och protontal nära de s. k. magiska talen) kan beskrivas med skalmodellens sfäriskt symmetriska potential, uppvisar däremot kärnorna inom »sällsynta jordarternas» område ($150 \leqq A \leqq 190$) och inom »aktiniderna» ($A \geqq 220$) en kärnform med stor excentricitet. De experimentella kvadrupolmomenten inom dessa områden svarar i genomsnitt mot en ellipsoidformad materieutbredning med storaxeln omkring 25 % större än lillaxeln. Nukleonerna antas för dessa deformerade kärnor röra sig i en potential, som är en direkt generalisation av skalmodell-potentialen. En del av parametrarna i potentialen bestämmes av villkoret, att när man låter excentricitetsparametern gå mot noll, så skall potentialen reproducera skalmodellens sekvens av tillstånd, åtminstone i områdena kring de magiska talen. Effekten av kärnans rotation på den inre nukleonrörelsen blir för dessa kärnor med stora deformationer i första approximationen försumbar, dvs. kärnans rotationstid är stor i förhållande till perioden för den enskilda nukleonens rörelse.

Med kännedom om den inre nukleonvågfunktionen kan man sedan beräkna ett antal empiriskt observerbara storheter såsom spin, magnetiskt moment, övergångssannolikheterna för beta- och gammaövergångar (vidare en storhet, som karakteriserar rotationsspektra för kärnor med $K = \frac{1}{2}$, den s. k. »decoupling»-faktorn). En jämförelse av experimentella spin med modellens förutsägelser visar en anmärkningsvärd överensstämmelse. Även kärnornas jämviktsdeformationer har beräknats ur modellen och stämmer väl överens med de värden på excentriciteten, som svarar mot de uppmätta kvadrupolmomenten. (I avhandlingen ingående arbeten, som innehåller denna jämförelse med empiriska data, är utförda i samarbete med Dr. B. Mottelson.)

Vidare kan nämnas att de diskontinuiteter i ett antal experimentella storheter, som kvadrupolmoment och »isotope shift», vilka förknippats med neutrontalen 88—90, här får en plausibel förklaring. I stället för att vara fråga om en effekt av fyllning av skal, antyder modellen, att det här är ett redan fyllt skal, $h\ ^{11}/_{2}$, som brytes upp, då två neutroner tillföres en kärna med 88 neutroner.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

GÖSTA WRANGLÉN, *Studies on the Growth, Form and Structure of Electrodeposited Metals.* Sammanfattning i Svensk Kemisk Tidskrift *67* (1955), 463—471 av sju uppsatser publicerade i Svensk Kemisk Tidskrift, Acta Chemica Scandinavica, KTH:s Handlingar samt Teknisk Tidskrift. Disputation vid Kungl. Tekniska Högskolan den 16 dec. 1955. Opponenter: docent UNO TRÄGÅRDH, docent OTTO MELLIS (extra ordinem) samt tekn. lic. EINAR MATTSSON.

Avhandlingen utgöres till sin huvuddel av mikrofotografiska undersökningar av kristallisationsförloppet och strukturen hos elektrolytiskt utfällda metaller. Även röntgenografiska och analytiska metoder tillämpas. Genom att elektrolysera i mycket små celler direkt på mikroskopets objektbord har författaren kunnat följa tillväxten av de på katoden utfällda metallkristallerna. Kristalltillväxten sker genom att skikt utbreder sig i sidled från vissa aktiva centra eller tillväxtcentra. Vid långsam tillväxt (låg strömtäthet) ligger dessa centra mitt på kristallytorna, vid hastig tillväxt (hög strömtäthet) däremot på hörn och kanter. Genom att ofta flera skikt i snabb följd utbreder sig från samma centrum, ger den skiktvisa tillväxten vid betraktande i mikroskopet ungefär samma intryck som vattenvågor, som sköljer en sjöstrand. Författaren har närmare studerat inverkan av elektrolytens sammansättning på dessa tillväxtskikt. Bl. a. visas, att lim, en vanlig tillsats vid elektrolytisk metallutfällning, hämmar skiktens sidvisa utbredning, varemot i stället deras antal och tjocklek ökas.

Författaren har vidare undersökt sambandet mellan de utfällda kristallernas yttre form och atomanordningen i ifrågavarande metalls rymdgitter. Bl. a. undersökes, hur elektrolytiskt utfällda metallkristaller överensstämmer med Kossel-Stranski's kristalltillväxtteori. Särskild uppmärksamhet har ägnats kristallskelett, s. k. dendriter. Dessa består av en stam och av grenar av första, andra, tredje osv. generationen och påminner om vissa växter. Endast vissa bestämda vinklar uppträder mellan stam och grenar resp. mellan olika grenar, och dessa vinklar överensstämmer med de, som återfinnes mellan olika atomrader i rymdgittret. Ett beteckningssystem för dendriter införes.

I de mera tekniskt inriktade delarna av avhandlingen utredes betingelserna för uppkomsten av pulverformiga och malbara metallutfällningar, avsedda för framställning av metallpulver för pulvermetallurgiska ändamål. Författaren har vidare härlett ett lätthanterligt matematiskt uttryck för den s. k. spridförmågan i elektrolytiska bad. Härmed avses badets förmåga att jämnt fördela en elektrolytisk metallutfällning på föremål av oregelbunden form. Begreppet är av betydelse vid sådana processer som förnickling och förkromning.

Lars Hörmander, *On the theory of general partial differential operators.* Acta Math. *94*, 161—248. Disp. i Lund den 22 okt. 1955. Opponenter: J. L. Lion, Maître de conférences, Nancy, och B. Fuglede, Amanuensis, Köpenhamn.

Avhandlingen behandlar grundläggande problem för partiella differentialoperatorer, dvs. ändliga summor $P=\Sigma a_q D^q$ där D^q betecknar en partiell derivata av godtycklig ordning och koefficienterna a_q antas tillräckligt deriverbara (kap. I, IV) resp. konstanta (kap. II, III). På numera vanligt sätt utvidgas definitionsområdet så att P blir en sluten operator i $L^2(\Omega)$, där Ω är ett godtyckligt givet begränsat område.

Det första problem man har anledning att ställa är huruvida ekvationen $Pu=f$ är lösbar för varje $f\in L^2(\Omega)$. I kap. II och IV visas detta vara fallet, då koefficienterna är konstanta resp. då de är variabla men ekvationen saknar multipla karakteristiker, och Ω är tillräckligt litet. Det senare fallet är särskilt intressant eftersom man tidigare saknat resultat för ekvationer som varken har analytiska koefficienter eller är av speciell typ (elliptisk, normalt hyperbolisk eller parabolisk).

Inskränkningar av definitionsområdet av P genom lineära randvillkor svarar mot operatorer $\hat{P}$ för vilka $P_0\subset\hat{P}\subset P$, där P_0 svarar mot försvinnande Cauchydata på hela randen och kallas *minimala* operatorn. (Man definierar P_0 som avslutning av inskränkningen av P till C_0^∞, mängden av oändligt deriverbara funktioner som försvinner i omgivningen av randen av Ω.) Med en variant av Hadamards definition kallas randvärdesproblemet korrekt ställt om $\hat{P}$ har begränsad invers. I de båda ovannämnda fallen bevisas existensen av korrekt ställda randvärdesproblem.

Kapitlen II och III ägnas åt ett noggrant studium av P_0 och P (konstanta koefficienter). Nödvändiga och tillräckliga villkor för att en minimal operator Q_0 skall vara definierad överallt i området av en annan, P_0, ges i kap. II. Dessa medför skarpa resultat om egenskaperna på randen och i det inre av Ω hos funktioner i området av P_0. — I kapitel III visas att i hela området av en partiell *maximal* differentialoperator P kan endast differentialoperatorerna $aP+b$ med konstanta a och b vara definierade. — Av resultaten för minimala operatorer i kap. II följer att multiplikation med en funktion i C_0^∞ överför definitionsområdet av P_0 i sig. I kapitel III bestäms de maximala operatorer för vilka motsvarande sats gäller. I samband därmed karakteriseras klassen av operatorer för vilka alla lösningar av $Pu=0$ är oändligt deriverbara. Denna egenskap är klassisk för bl. a. Laplace-ekvationen och värmeledningsekvationen. Med $p(\xi)=e^{-i(x,\,\xi)}Pe^{i(x,\,\xi)}$, vilket är ett polynom, karakteriseras den av att $p(\xi+\vartheta)/p(\xi)\to 1$ då $\xi\to\infty$ genom reella värden för varje fixt ϑ. (Flera ekvivalenta egenskaper ges.)

Spektralteorin för elliptiska operatorer överförs till operatorer med denna egenskap. För tillväxten av derivator av lösningar med derivationsordningen ges uppskattningar som generaliserar Holmgrens satser för värmeledningsekvationen. Den väsentliga punkten i bevisen i kapitel III är konstruktionen av fundamentallösningar för dessa operatorer, som är oändligt deriverbara utanför origo.

Rolf Torsten Pauli, *Investigation of some nuclear reactions with light elements.* Arkiv för fysik Bd 4 nr 12, Bd 4 nr 13, Bd 8 nr 21, Bd 9 nr 36 och Bd 10 nr 16 jämte sammanfattning. Disp. vid Tekniska Högskolan den 1 dec. 1955. Opponenter: docent Karl Gustav Malmfors, doktor R. Meier, Zürich.

Författaren har tillsammans med C. Miliekowsky byggt en accelerationsanläggning för tunga joner, bestående av en kaskadgenerator i 7 steg för max. 1,4 MV, plus ett accelerationsrör. Första delen beskriver uppbyggnaden av anläggningen. I andra delen, där Mileikowsky också är medförfattare, redogöres för en bestämning av excitationskurvan för kärnreaktionerna $O^{18}(p,\alpha)N^{15}$ och $N^{15}(p,\alpha)C^{12}$. I båda fallen fann författaren resonanser. Dessa indikera existensen av exciterade nivåer i den kompoundkärna, som bildas som ett mellanled vid kärnreaktionen genom sammansmältning av infallande partikel med targetkärnan. I detta fall svarar resonanserna mot nivåer i $O^{18}+p=F^{19}$ resp. $N^{15}+p=O^{16}$. Utgångsämnet för kärnreaktionen bildar ett mål för den bombarderande partikeln (proton) och kallas därför för target. Det måste prepareras i tunna skikt för att protonens energi i träffögonblicket skall vara entydigt bestämd. Tunna skikt av targetämnena (gaser) framställdes genom att bombardera metallplattor av Cu med $O^{18}H_2^+$-joner resp N^{15+}-joner i en magnetisk isotopseparator, jonenergi ca 40 keV. I ytskiktet av Cu-plattan får man då tunna skikt av O^{18} resp N^{15} (några $\mu g/cm^2$), vilket är fullt tillräckligt för att ge mätbara utbyten av α-partiklar från de ovan angivna kärnreaktionerna, när Cu-plattan bombarderas med protoner med energier inom intervallet 300—940 keV.

Senare, när författaren byggt en elektroniskt styrd stabiliseringsanordning för spänningen till acceleratorröret, var det möjligt att — med hjälp av en av Mileikowsky byggd magnetisk precisionsspektrometer för tunga partiklar — utföra noggranna bestämningar av energitoningen, Q-värdet, för olika kärnreaktioner. På grund av massans och energiens ekvivalens innebär en noggrann bestämning av energiskillnaden mellan de olika kärnor, som deltaga i en kärnreaktion, att man samtidigt noggrant bestämmer deras masskillnad. På grundval av uppmätta Q-värden har man kunnat upprätta en massskala för atomkärnor mellan H och Al, som är noggrannare än den

masspekrometriskt bestämda. Tillsammans med K. Ahnlund och C. Mileikowsky bestämde författaren Q-värdet för reaktionen $O^{17}(d, \alpha)N^{15}$ till 9807 ∓ 12 keV, vilket väl stämmer med det värde 9813 ∓ 11 keV som kunde beräknas ur tidigare kända Q-värden för de tre reaktionerna $O^{16}(d, p)O^{17}$, $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$ och $N^{14}(d, p)N^{15}$. Preparationen av ett target av O^{17}, vars naturliga förekomst i syre endast är 0,05 %, fordrade särskild omsorg.

Huvudarbetet utgöres av en bestämning av massan hos N^{16} i grundtillståndet och excitationsenergien för denna nukleids tre lägsta nivåer. Dessa bestämningar gjordes genom att mäta Q-värdena för reaktionen $O^{18}(d, \alpha)N^{16}$ dels när slutprodukten är N^{16} i sitt grundtillstånd dels när slutprodukten är N^{16} i något av sina exciterade tillstånd. Från reaktionen erhölls α-partiklar av fyra olika energier, och man fann därav att N^{16} grundtillstånd låg 10,39 MeV över O^{16} grundtillstånd så att N^{16}'s massa är $16{,}01116 \pm 0{,}00002$ atom mass-enheter (fys. skala). Vidare att N^{16} har exciterade nivåer med 116 ± 6 keV, 300 ± 12 keV och 391 ± 12 keV. Författaren söker utreda om dessa nivåer korrespondera mot kända nivåer i O^{16}, vilket bör vara fallet om kärnkrafterna i stort sett är laddningsoberoende, men finner att inget med säkerhet kan sägas om en sådan korrespondens med nuvarande bristfälliga kännedom om nivåernas karaktäristiska parametervärden.

Slutligen har författaren experimentellt undersökt läget av fokuseringsplanet i den använda magnetiska spektrometern för tunga partiklar. Denna har ett inhomogent fält och är därför dubbelfokuserande. Det experimentellt bestämda fokuseringsplanet visade tämligen god överensstämmelse med det som kunde beräknas ur den givna fältfördelningen.

Katarina Kraft Ahnlund, *Transmutations of Light Nuclei. Experimental Determinations of Reaction Energies, Atomic Masses and Angular Distributions.* Sammanfattning av 11 uppsatser publicerade i Arkiv för Fysik och The Physical Review. Disputation vid K. Tekniska Högskolan, Stockholm, den 23 mars 1956. Opponenter: Professor Hilding Slätis och docent Karl Gustav Malmfors.

Arbetena utfördes vid högspänningsanläggningen vid Vetenskapsakademiens Nobelinstitut för Fysik under åren 1952—56. En rad kärnreaktioner inom det lätta massområdet har studerats med hjälp av en dubbelfokuserande vridbar magnetisk tung-partikelspektrometer.

Den första delen av avhandlingen omfattar precisionsmätningar av reaktionsenergier. Sådana har utförts för reaktionerna $O^{17}(d, p)O^{18}$ (2 grupper) $O^{17}(d, \alpha)N^{15}$, $O^{18}(d, p)O^{19}$ (3 grupper), $Ne^{20}(d, p)Ne^{21}$ (3 grupper), $Ne^{22}(d, p)Ne^{23}$ samt för $C^{13}(d, p)C^{14}$ och $N^{14}(d, \alpha)C^{12}$. Av dessa hade reaktionerna på O^{17}- och O^{18}-targets ej tidigare realiserats.

De dittills okända energischemata för kärnorna O^{18} och O^{19} underkastades en systematisk genomgång upp till cirka 4 MeV:s excitation över grundtillståndet med hjälp av reaktionerna $O^{17}(d,p)O^{18}$ och $O^{18}(d,p)O^{19}$. Härvid upptäcktes och uppmättes för O^{18} en och för O^{19} två exciterade nivåer. Vidare har atommassorna för O^{19} och Ne^{23} precisionsbestämts.

Den andra delen av avhandlingen beskriver metodik och experiment för att med hög energiupplösning mäta vinkelfördelningar av partikelgrupper från kärnreaktioner, vilket är ett hjälpmedel att nå kunskap om energinivåers spin- och paritetsegenskaper. Under bombardemang av target utsändes i allmänhet många partikelgrupper samtidigt både från targetsubstansen själv och från oundvikliga föroreningar varför ofta endast apparatur med god energiupplösning kan urskilja vinkelfördelningen hos en speciell grupp. Två grupper från $O^{18}(d,p)O^{19}$ ledande till grundtillståndet och första exciterade tillståndet i O^{19} har varit de första problem som studerats med denna apparatur.

Bokanmälningar

E. A. Coddington/N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations.* »International Series in Pure and Applied Mathematics». McGraw-Hill, New York 1955, Pp. 429, 64s. net.

Författarna ange i företalet att boken utarbetats efter föreläsningar och att stoffurvalet delvis har bestämts av deras egna intressen. Resultatet har blivit en fyllig framställning av den moderna teorin för ordinära differentialekvationer, vilket är av särskild betydelse, då det är ont om moderna böcker på detta område.

Boken inledes med två kapitel om existens- och entydighetssatser. Därefter följa några kapitel om allmänna egenskaper hos lösningarna till linjära ekvationer och system av linjära ekvationer av första ordningen. Först ges kortfattat behövliga satser ur matristeorin, och sedan användas dessa på de linjära systemen. Därpå behandlas de linjära ekvationerna av *n*-te ordningen. Regulära och irregulära singulariteter undersökas med en ny metod. I samband med de asymptotiska utvecklingarna kring irregulära singulariteter studeras även det asymptotiska uppförandet hos lösningar till linjära system med stor parameter.

Då författarna äro speciellt intresserade av egenvärdesproblem, ha dessa fått en utförlig behandling delvis med nya metoder. Avsnittet inleds med en behandling av det icke-singulära självadjungerade egenvärdesproblemet av andra ordningen med utvecklings-, oscillations- och jämförelsesatser. Därefter studeras motsvarande singulära problem och det självadjungerade problemet av *n*-te ordningen. Även icke-

självadjungerade problem behandlas utförligt. De metoder, som författarna använda, äro elementära. Teorin för linjära transformationer i Hilbertrum åberopas ej.

I nästa avsnitt undersökes stabilitet och asymptotiska egenskaper hos lösningar till icke-linjära system samt störningsteori för system med periodiska lösningar.

De sista kapitlen ägnas åt studiet av topologiska egenskaper hos lösningarna till vissa system inklusive Poincaré-Bendixsons teori och differentialekvationer på en torus.

En del av de använda metoderna härröra från författarna själva. I hela boken märks en strävan att så mycket som möjligt använda elementära metoder. I texten behandlas blott de allmänna satser, som teorin vilar på och endast ett fåtal exempel ges. Därför saknas de teoretiskt ointressanta elementära metoderna för behandling av vissa enkla ekvationer (Bernoullis etc.). Bessels ekvation, hypergeometriska ekvationen m. fl. ha placerats i problemavdelningen.

Bokens värde ökas i hög grad av att varje kapitel innehåller en stor samling värdefulla problem med anvisningar. Bland dessa finns en del material, som ej kunnat beredas plats i texten.

Litteraturhänvisningar saknas i texten. Dock finns i slutet av varje kapitel ett mindre antal referenser.

Framställningen är av hög kvalitet, men boken är så koncentrerad, att den ej är lättläst. Erforderliga förkunskaper torde utgöras av större delen av trebetygskursen. Speciellt behövs grunderna av teorin för analytiska funktioner och matriser. Lebesgueintegralen används vid några tillfällen.

Boken kan varmt rekommenderas. *Ulf Hellsten*

G. Heilbronn, *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach.* Gauthier-Villars, Paris 1955, 97 p., 1300 fr.

I detta häfte ur den kända serien »Mémorial des Sciences Mathématiques» behandlas den i Frankrike sedan gammalt mycket omhuldade frågeställningen om den explicita integrationen av de partiella differentialekvationerna av 2:a ordningen med två oberoende variabler. Det lilla verket motsvarar den bästa franska traditionen på området. Dess huvudsyfte är att något utförligare framställa Drach's svårläsbara (och därför icke så mycket kända) originalarbeten och att på så sätt göra dem tillgängliga för en bredare matematikerkrets. Det ådagalägges klart, hurusom Drach är den egentlige fortsättaren av Ampère's klassiska undersökningar. Visserligen har redan, först Darboux och senare Goursat, generaliserat de Ampèreska undersökningarna genom att införa karakteristikerna av högre ordning, men genom att

dessa undersökningars huvudvikt hade lagts på integrabla kombinationer i karakteristiksystemet hade det egentligt fruktbärande hos Ampère's idéer ej hunnit göra sig gällande. I det att Drach's frågeställning just i denna punkt gestaltades mera generell lyckades han att göra väsentliga framsteg. Detta presenteras i de första tre kapitlen. Men i det 4:e och sista kapitlet går förf. utöver Drach och ger ett slående exempel på bärvidden av dennes integrationsmetod därigenom att han utförligt diskuterar en viss klass av icke-linjära partiella differentialekvationer av 2:a ordningen (nämligen sådana som äger en invariant av andra ordningen).

Sedan några årtionden har ovan omtalade undersökningar kommit att stå något i bakgrunden gentemot modernare metoder, vid vilka intresset mera inriktas på uppsökandet av genom randvillkoren individualiserade lösningar. Det är sedan länge anmälarens uppfattning att Drach's principer även idag borde komma till användning. Därvid skulle undersökas, vad man med dessa metoder skulle kunna vinna vid behandlingen av många tekniskt högaktuella icke-linjära differentialekvationer (t. ex. inom gasdynamiken för strömningar i närheten av ljudets hastighet, där de beskrivande differentialekvationerna till sin natur är icke-linjära och därför ej ens för svaga störningar får linariseras). Därför skall det lilla häftet, som visserligen ej är så lättläst, även rekommenderas för den tillämpade matematiken.

Hermann Behrbohm

J. Lelong-Ferrand, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée.* Cahiers scientifiques, Fasc. XXII. Gauthier-Villars, Paris 1955, VII+257 p., 4000 fr.

I denna bok ger författarinnan en sammanfattning av egna och andras forskningsresultat inom teorin för konform avbildning. Vid de allmänna problemställningar det gäller kan man ej förutsätta analyticitet hos den funktion som förmedlar avbildningen, utan framställningen bygger som titeln anger på ett studium av funktioner med begränsad Dirichletintegral. På detta sätt kan också en systematisk behandling ges av problem angående randavbildningen vid den plana konforma avbildningen.

Tord Ganelius

Colloque sur l'analyse statistique. Tenu à Bruxelles les 15, 16 et 17 décembre 1954. Centre Belge de recherches mathématiques. Masson & Cie, Paris 1955, 186 p., 1900 fr.

I detta colloquium deltog åtskilliga framstående europeiska statistiker och gav sin syn på aktuella statistiska frågor. de Finetti från Rom diskuterar Wald's decision-teori, Blanc-Lapierre från Alger avhandlar s. k. punktprocesser, Darmois från Paris skriver om lösta och

olösta regressionsproblem, van Dantzig från Amsterdam ger en översikt över holländarnas specialitet: icke-parametriska tests, och Bartlett från Manchester behandlar statistisk analys av stokastiska processer, därvid bland annat apostroferande svensken Grenander för dennes insatser på detta område. För den som är bevandrad i statistikens teori ger boken ett icke oävet reportage från läget på den statistiska fronten anno 1954. *Gunnar Blom*

Hjalmar Olson och Stig Hjalmars, *Stereometri för reallinjens matematiska gren.* Svenska Bokförlaget/Norstedts. Stockholm 1955. 58 s., kr. 3: 25.

Denna lärobok i stereometri skiljer sig inte på något mera avsevärt sätt från gängse läroböcker i stereometri för gymnasiet. De moment, som jag i det följande tar upp till behandling, är framför allt sådana, där framställningen i ett eller annat avseende avviker från den, man vanligen finner.

De inledande satserna om punkter, räta linjer och plan meddelas utan bevis till övervägande delen. De metodiska anvisningarna för undervisningen i matematik på gymnasiet utsäger visserligen, att dessa inledande satser »bör genomgås kursivt i behövlig utsträckning», men det hade enligt min mening varit befogat att införa några fler bevis i denna lärobok för den matematiska grenen.

Behandlingen av prismat kommer i stort sett efter motsvarande behandling av cylindern, och detsamma gäller pyramiden—konen. Det förefaller mig tvivelaktigt, om denna framställning är enklare för eleverna än den motsatta. — Ett särskilt kapitel har ägnats åt likformighet, och kapitelrubriken är Likformiga kroppar. I framställningen hänvisas till satser i plangeometrien, och begreppet likställighet åberopas. Överhuvud taget har satserna i detta kapitel fått en generell utformning, och bevisföringen delvis fått så generell karaktär, att den säkert blir svår att följa för gymnasisten, helst som den inte åtföljes av belysande figurer. — På kapitlet om sfären har jag inte kunnat upptäcka några problem på beräkning av avstånd utefter parallellcirklar eller storcirklar på jordklotet.

Emellertid är det vanskligt att yttra sig om en lärobok för gymnasiet, innan man varit i tillfälle att praktiskt pröva den vid undervisningen och innan man tillsammans med eleverna genomräknat lärobokens övningsexempel. — Ovanstående anmärkningar bör inte heller få bortskymma det intryck av klarhet och vederhäftighet, som i stort sett tycks mig karakterisera framställningen. Övningsexemplen — en synnerligen betydelsefull del av en lärobok i matematik — har jag bara i begränsad omfattning hunnit studera, men mitt intryck är, att de är goda. *Karl von Proschwitz*

M. Zamansky, *La sommation des séries divergentes*, Gauthier-Villars, Paris, 46 p., 700 fr.

Detta häfte är, som författaren anmärker i förordet, en ledtråd när det gäller teorin för summation av divergenta serier. Författaren beskriver utan alltför många bevis de vanligaste summationsmetoderna (de s. k. lineära metoderna). I stället för bevis ges talrika hänvisningar till originalarbeten och samlingsverk på området i fråga. Avsikten är, att man genom att läsa häftet skall kunna få en allmän överblick över det viktigaste inom detta fält, en intention, med vilken författaren också lyckats. *Hans Riesel*

C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press 1955, Pp. 155, 22s. 6d. net.

Hydromekaniken har som teoretisk vetenskap under senaste decennierna råkat komma i en ganska besvärlig situation. De klassiska problemen om »ideala» vätskors strömning och viskösa vätskors laminära strömning är väl genomarbetade och det är ganska sällsynt att man nu finner ett aktuellt problem av klassisk natur, som låter sig angripas på teoretisk väg, och som ej redan finnes löst i litteraturen. Den våldsamma tekniska utvecklingen på senare tid har haft till följd att man inom praktiken mött otaliga problem av hydrodynamisk natur, där antingen den klassiska hydrodynamikens idealiseringar ej är tillämpliga eller man redan på ett tidigt stadium stöter på rent matematiska svårigheter på grund av de hydrodynamiska grundekvationernas (Navier-Stokes ekvationer) icke lineära form. Praktikens krav på teoretiska metoder och resultat har medfört att man ofta släpper den klassiska hydrodynamikens krav på matematisk stringens och går utvecklingen i förväg genom att anta vissa i princip deducerbara resultat som sanna och på så sätt skapar mer eller mindre djärva matematiska modeller för olika strömningsproblem. Ett exempel på en vågad men praktiskt nyttig strömningsmodell är Prandtls gränsskiktsteori.

Turbulensfenomenens innersta orsak är än i dag höljd i dunkel. En uppfattning är att de enklaste lösningarna till grundekvationerna blir instabila under vissa betingelser och övergår till synnerligen komplicerade och oöverskådliga lösningar, som aldrig är stationära. Redan på 1800-talet försökte den holländske teoretiske fysikern H. A. Lorentz förklara detta genom att utgå från den tyvärr felaktiga satsen att värmeförlusterna på grund av inre vätskefriktionen skall vara minimala. Allt sedan dess har man på olika tänkbara sätt försökt få ett grepp på turbulensens uppkomst genom störningsmetoder, men någon allmän fullt tillfredsställande teori finnes ej ännu. Det är mot denna

bakgrund av ideliga komplikationer och fenomenologisk oklarhet som man får bedöma värdet av Lin's bok.

En vanlig metod att undersöka stabilitet hos lösningar till differentialekvationer är att man tänker sig lösningen störd och att man sedan som en första approximation lineariserar den störda ekvationen. Att visa, att den lösning man efter linearisering erhåller verkligen är en approximativt störd lösning till de hydrodynamiska ekvationerna är formellt svårt, och det kanske ej alltid är sant. Lin säger uttryckligen ifrån att han *antar* att ekvationerna får lineariseras. Han följer sedan en från den matematiska fysiken välkänd metodik. För störningen ansättes en lösning, vars tidsberoende del är en exponentialfunktion. Av randvillkoren framgår sedan om denna exponentialfunktion är dämpad resp. växande, varvid man har stabilitet resp. instabilitet. Genom denna metodik har man för de icke lineära hydrodynamiska ekvationerna principiellt begränsat sig till behandling av problem med stationära randvillkor, så att den laminära strömningen, vars stabilitet skall undersökas, är tidsoberoende. Lin gör i sin bok en fullständig sammanfattning av vad som hittills gjorts med denna metodik, varvid hans egen produktion är av största betydelse. Självfallet har han begränsat sig till de geometriskt enklaste fallen och behandlar ingående strömning mellan två koncentriska, roterande cylindrar, plan Poiseuille-strömning samt gränsskikt över en plan platta.

Det må betonas att denna bok är skriven av en man, som arbetar i främsta linjen i den nuvarande utvecklingen. Om de redovisade resultaten och metoderna är av fundamentalt värde, kan endast framtiden utvisa. *Bengt Andersson*

E. R. Andrew, *Nuclear Magnetic Resonance.* Cambridge Monographs on Physics, Cambridge 1955, Pp. xi+265, 35s.

Pierre Grivet, *La résonance paramagnétique nucléaire.* Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1955, Pp. iv+298, 1800 F.

Purcell vid Harvard universitetet och Bloch vid Stanford, U.S.A. (Elementa *36,* 13, 1953) publicerade år 1946 sina upptäckter rörande den magnetiska kärnresonansen. Denna tillåter som bekant en mer än hundrafalt större noggrannhet vid bestämningen av atomkärnornas magnetiska moment än den tjugo år äldre molekylarstrålemetoden. Den nya kärnresonansmetoden vann snabbt ökad användning och väckte intresse ej blott hos alla fysiker, främst kärnfysiker och fysiker verksamma inom »solid state», utan i högsta grad även hos kemister, metallurger, geofysiker, biologer och medicinare. Ehuru monografier redan varit tillgängliga på detta område, torde nya dylika med hänsyn till den

snabba utvecklingen vara av stort värde. De amerikanska insatserna äro kanske mest kända. Franska och schweiziska forskare hava emellertid gjort viktiga bidrag i såväl teoretiskt som experimentellt hänseende. Detta faktum kommer väl till synes i ovan anförda kompendium av Grivet. För läsare av Elementa och Kosmos är bekant, att Purcells metod utvecklats även vid Forskningsinstitutet för Fysik i Stockholm. Metoden introducerades här av prof. Kai Siegbahn år 1947 och har använts och utvecklats ytterligare av honom, av docent G. Lindström, dr B. N. Bhar och docent E. Odeblad. Forskningsinstitutets insats omnämnes för övrigt i vartdera av de föreliggande verken.

Andrew, som arbetat tillsammans med prof. Purcell, inleder sin bok med atomkärnornas magnetiska egenskaper och ger en grundläggande teoretisk beskrivning över resonansfenomenen, spin-spin samverkan, spin-gitter relaxationstider samt betingelser för registrering av kärnresonans. Han klarlägger likheter och olikheter i Purcells och i Blochs metoder. De experimentella arrangementen beskrivas sedan ingående med bilder av lämpliga elektriska kretsar osv. Härefter behandlas mätningen av kärnmoment, spin, kvadrupolmoment, linjebredd och spin-gitter relaxationstid, jämförelse av relaxationsteori med experiment, transienta effekter, pulsmetoder, kemiskt beroende, finstruktur, vatteninnehåll i biologiskt material m. m. Kärnresonans i gaser, vätskor och fasta kroppar behandlas separat. I många fall kunna viktiga avgöranden träffas i kristallstrukturfrågor. Fascinerande äro Pounds negativa temperaturexperiment. Olikheterna hos kärnresonanser i metaller och icke-metaller belysas. Kärnresonansens tillämpningar inom olika områden anges utförligt. Litteraturförteckningen är mycket omfattande (15 sidor).

Grivets bok har ett helt annat utseende och är egentligen ett kompendium, som skrivits av 5 franska och 3 schweiziska forskare. Arbetet presenteras i ett företal av C. J. Gorter, professor vid Kamerlingh Onnes laboratoriet i Leyden. Författarna ha alla gjort insatser inom kärnresonansområdet, och endast en av dem är icke nämnd i Andrews utförliga forskarregister. Grivet ger först själv en kort inledande teoretisk översikt av kärnmagnetism, kärnmoment och resonansfenomen. Blochs klassiska modell omnämnes. I andra kapitlet, som skrivits av R. Gabillard, följer en mycket detaljerad behandling av Blochs ekvation. Detta avsnitt är värdefullt för var och en som önskar fördjupa sina insikter beträffande spin-spin och spin-gitter relaxationstider, formen hos de signaler som registreras på oscillografskärmen vid experimentella undersökningar samt de faktorer som inverka på de erhållna signalerna. Y. Ayant ger i tredje kapitlet en kvantmekanisk behandling av resonansfenomenet, samverkan mellan två spin, spinmiljöns relaxation, absorption och dispersion samt finstruk-

tur. R. Gabillard redogör för experimentella metoder i bokens fjärde kapitel, fortfarande med mycken anknytning till teorien. Tillsammans med M. Soutif ger han i femte kapitlet mera praktiska exempel på resonansmetodens användning och beskriver nödvändig elektronisk utrustning. Sjätte kapitlet har sammanställts av G. J. Bene, P. M. Denis och R. C. Extermann och behandlar realiserandet av de erforderliga magnetfälten. Fem av de redan nämnda författarna ägna sjunde kapitlet åt det gyromagnetiska förhållandet och åt tabeller häröver ävensom över magnetiska moment och elektriska kvadrupolmoment för 142 nukleider. I åttonde kapitlet behandlar Ayant teorien och M. Buyle-Brodin de experimentella dispositionerna för kvadrupolresonans. Nionde kapitlet ägnas slutligen åt en översikt av de olika teorier som alltsedan Schmidt och fram till Mayer och Jensen uppställts för att förklara regelbundenheter vid fördelningen av magnetiska moment i elementens periodiska system.

Sammanfattningsvis kan sägas, att Andrews bok lämpar sig bäst för den, som önskar en uppfattning om huru man åstadkommer magnetisk kärnresonans och vilka användningsmöjligheter detta fenomen har, medan den, som i detalj vill känna kärnresonansens teori och mätningsmetoder, har ovärderlig nytta av Grivets och hans medarbetares kompendium. *Hilding Slätis*

A. Guinier / G. Fournet, *Small-Angle Scattering of X-Rays*, John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1955, Pp. xi+268, $ 7.50.

Genom att studera röntgenstrålars diffraktion i fasta, kristallina ämnen har man som bekant vunnit omfattande kunskap om hur atomerna är lagrade i ett mycket stort antal ämnen. Från början drogs uppmärksamheten mest till den påfallande regelbundenheten i många kristallstrukturers »oändliga, homogena diskontinuum», som ger sig tillkänna i röntgendiffraktionsbildens regelbundna mönster av skarpa interferenser. Senare fann man att diffusa interferenser kunde ge upplysningar om tillståndet i mycket finfördelad eller i mindre regelbundet uppbyggd materia och i »amorfa» ämnen (ändliga, heterogena diskontinua). Särskilt givande har det varit att studera det mer eller mindre diffusa diffraktionsmönstret vid mycket låga avböjningsvinklar. Denna »small-angle scattering» har med framgång använts vid undersökningar av vitt skilda ämnen, lösningar, emulsioner, fibrer och proteiner. Betydelsefulla resultat har nåtts vid studium av legeringar, bl. a. av åldershärdning. Stort intresse tilldrar sig även undersökningarna av katalysatorer.

Föreliggande bok ger en klar men komprimerad framställning av den allmänna teorien för lågvinkelspridning och av den experimen-

tella metodiken. Den behandlar även hur de experimentella resultaten tolkas. Av stort allmänt intresse är kapitlet om metodikens tillämpningsområden. Detta avsnitt har en »populär» prägel och avstår från den matematiska och fysikaliska apparaten »so that it can be read without difficulty by a non-specialist». Författarna har på detta sätt velat göra det möjligt för icke-specialisten att själv bedöma vilken nytta han kan draga av lågvinkelspridningen för sina egna forskningsproblem.

Förutom författarnas namn står på bokens rygg även (C. B.) Walker och (K. L.) Yudowitch. Den förre har översatt det franska originalmanuskriptet, den senare har sammanställt den värdefulla bibliografien, som omfattar 569 tidskriftsuppsatser. *Arne Magnéli*

Gerhart Friedlander / Joseph W. Kennedy, *Nuclear and Radiochemistry.* Revised Version of Introduction to Radiochemistry. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd., London, 1955, ix+468 p., $ 7.50.

Boken är en reviderad och utökad upplaga av författarnas på samma förlag år 1949 utkomna verk, anmält av professor J. Tandberg i Elementa *32* (1949) 222. Den äldre föregångaren till föreliggande arbete är så väl känd att en presentation utöver den tidigare anmälarens är obehövlig, och det torde vara av mest intresse att här gå in på de förändringar och förbättringar som vidtagits. Först emellertid en nomenklaturfråga, som författarna behandla i företalet.

Ordet »radiochemistry» i första upplagans titel avsåg att omfatta såväl atomkärnornas reaktioner som hithörande problem av i klassisk mening kemisk natur. Den nya upplagans titel har tillkommit för att bättre anpassa sig till vad författarna anse vara gängse språkbruk, nämligen »radiochemistry» för enbart de klassiskt kemiska aspekterna och »nuclear chemistry» som beteckning för kärnreaktioner och tillhörande fenomen. Det svenska språkbruket är långt ifrån klart på denna punkt, varför inlägget torde vara värt beaktande.

Mycket har hänt sedan 1949 på det kärnkemiska området, och författarna synas inte ha sparat någon möda då det gällt att i framställningen inarbeta så fundamentala nyheter som kärnskalsteorien, den moderna α-sönderfallssystematiken, lagbundenheterna för spontan klyvning, högenergireaktioner (såsom spallation), etc. Åtskilliga områden behandlas utförligare än i första upplagan, t. ex. neutroninducerade kärnreaktioner, Fermis teori för β-sönderfallet, sönderfallsschemata (med grundlig diskussion av åtskilliga valda exempel). Helt nya äro ett mindre avsnitt om strålningskemi, dvs. kärnstrålningens kemiska verkningar, samt kapitlen 12 och 13, vilka behandla atomenergiens (riktigare: kärnenergiens) utvinning, även i form av

bombexplosioner, respektive kosmiska problem. Det radiokemiska stoffet är ganska genomgående omstuvat. Tabellmaterialet är utökat och synes mycket värdefullt.

Det är ej alltför ovanligt att en från början god lärobok i senare upplagor småningom blir tämligen oduglig på grund av författarens motvilja mot en radikal omarbetning för att anpassa boken efter det snabbt förändrade kunskapsmaterialet. Som redan framhållits gäller detta inte Friedlander och Kennedy's nya bok. Särskilt gott vittnar det om författarnas vilja att presentera ett aktuellt material att siffer-data icke blott i isotoptabellen utan även i texten och t. o. m. i de talrika övningsexemplen reviderats efter nyare mätningar.

Lars Melander

Robert L. Sproull, *Modern Physics — A Textbook for Engineers.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman Hall, London Pp. 491, $ 7.75.

»— we are not attempting in this book to teach theoretical physics. We are attempting to develop an understanding of the *nature* of nuclei, atoms, molecules and solids», ett uttalande som återfinnes i inledningskapitlet till kvantmekaniken. Bokens innehåll och utformning tycks vara mycket starkt influerade av den sedan några år pågående diskussionen i åtskilliga amerikanska tidskrifter om fysikens ställning främst i de tekniska läroanstalternas kursplaner. Begränsad tid och alltmer växande krav på grundliga insikter i även mera komplicerade fysikaliska grundföreteelser nödvändiggör en fortgående reduktion eller utmönstring (på detta stadium) av mera umbärliga avsnitt såväl av den klassiska fysiken som av mera tekniskt betonade tillämpningar.

Författaren har med sin erfarenhet från högskoleundervisning och teknisk-vetenskaplig verksamhet på ett begränsat utrymme förverkligat sina intentioner på ett utmärkt sätt. Bokens första hälft ägnas åt elementarpartiklarna, atomkärnan, atomen och molekylens egenskaper. Ett begränsat men väl utvalt antal försök behandlas och försöksresultaten analyseras ingående. Tyngdpunkten är förlagd till den kvantmekaniska behandlingen av atomens struktur. Vågfunktioner, potentialförlopp och energinivåer utgör här framställningens dominerande begrepp, allt framställt med ett minimum av matematiska hjälpmedel. Härifrån tar sedan författaren steget över till »the solid state physics», varvid den tidigare behandlade elementära kvantmekaniken blir den fundamentala grunden. Enligt recensentens mening utgör dessa avsnitt, bokens andra hälft, den värdefullaste delen. Litteraturen inom detta område är visserligen rikhaltig, men framställningen tynges ofta av en komplicerad matematisk behandling (i och för sig nödvändig vid en fullständigare teoretisk analys) eller också utmynnar den i ett enbart uppräknande av fakta, därför att

den teoretiska grunden fått en alltför knapphändig behandling. Författaren har emellertid i stort sett lyckats hålla den gyllene medelvägen. Molekylbindningar, kristallstruktur, elektriska, magnetiska och termiska egenskaper hos de fasta ämnena inordnas under gemensamma aspekter. Teorien för halvledare blir föremål för en instruktiv behandling, sedan författaren först ägnat defekter i kristallgitter ett ganska ingående studium. Framställningen vinner i klarhet genom åtskilliga analogier mellan atomära och makroskopiska problem. Bokens sista kapitel behandlar fysikalisk elektronik, väsentligen elektronemission och elementär elektronoptik, samt tillämpad kärnfysik.

Även i en lärobok, som kommer idealet ganska nära, kan en kritisk läsare finna problembehandlingar, som han gärna sett fullständigare eller genomförda på annat sätt. I Sproulls bok är det främst den systematiska behandling, som skulle lett fram till den atombundna elektronens fyra kvanttal, man saknar, en brist som gör sig märkbar speciellt därför att Pauliprincipen intar en ganska central ställning i åtskilliga av de behandlade problemen. Schrödingerekvationen lämnar visserlige de tre kvanttalen men på ett sätt (entydighets- och konvergensvillkor) som inte ger full rättvisa åt dessas fysikaliska tolkning och betydelse. Vektormodellen bör inte vara spektroskopistens privategendom!

Slutligen bör nämnas, att boken innehåller över 300 exempel av varierande svårighetsgrad, ett exemplariskt illustrationsmaterial och en omfattande litteraturförteckning samt tillämpar konsekvent MKSA-systemet. Den kan varmt rekommenderas åt alla dem som av behov och/eller intresse önskar vidgade eller uppfriskade kunskaper i modern fysik i den mening inledningscitatet anger.

E. Staffansson

C. H. Bachman, *Physics — A Descriptive Interpretation.* John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1955, Pp. 497, $ 5.50.

Den ökade insikten om fysikens betydelse för det moderna samhället och dess utveckling har gjort att många böcker numera skrivas för att ge även icke-fysiker en inblick i fysikens lagar och metoder. Även föreliggande bok är avsedd för detta ändamål. Den ger en översikt över hela fysiken, och författaren har på ett tilltalande sätt lyckats sammansmälta den klassiska och moderna fysiken till en enhetlig framställning. Man återfinner sålunda beskrivning på avancerade företeelser som synkrotron, atomreaktor och television liksom även på exempelvis de klassiska rörelse- och energilagarna. Som en röd tråd genom hela boken löper f. ö. behandlingen av energin och dess betydelse i olika fysikaliska sammanhang. De skilda fenomenen fram-

ställas ofta med utgångspunkt från tillämpningen på det mikrokosmiska området för att successivt komma över till det kosmiska.

Som redan titeln anger, är boken rent beskrivande. Härledningar och problemlösning saknas helt. Man kan nog säga, att kravet på matematiska förkunskaper hos läsaren har satts väl lågt. (I bokens början finner man t. o. m. en noggrann förklaring på vad som menas med procent.) Något konsekvent utnyttjande av ett givet enhetssystem förekommer icke. CGS-systemet användes i vissa sammanhang, men vid flera exempel användes engelska enheter, vilket bidrar till att där göra framställningen mindre njutbar för en svensk läsare. Som helhet måste dock boken betraktas som mycket välskriven. De originella och lustiga illustrationerna komplettera texten väl och är i många fall ägnade att väcka läsarens intresse. Boken kan rekommenderas till alla dem, som önska en lättläst, relativt fullständig och aktuell översikt över ämnet fysik. *Sven Lennander*

A. H. W. Beck, *Thermionic Valves, Their Theory and Design.* Cambridge at The University Press 1953, Pp. xvi+570, 60s. net.

»Thermionic valves» användes i England som gemensam benämning på alla slags elektronrör. Genom att envist hålla fast vid denna benämning, adekvat endast beträffande glödkatodlikriktarrör, anse sig engelsmännen hedra pionjären J. A. Fleming.

Ur förordet: »In writing this book I have attempted to give a theoretical account of the behavior of thermionic vacuum devices. Such an account should primarily be of use to graduates with a first degree in physics or electrical engineering and those who are starting independent work in this field, either in industry or in the various post-graduate courses on electronics. A reader who has mastered the contents should be able to make a critical appreciation of current research papers. I hope that the book will also prove useful to practising valve engineers and others engaged in the industry. I also hope, though faintly, that it may help the users of valves to understand the physical factors which limit valve performance and thereby encourage them to restrict their demands to what is possible.»

Boken är icke en nybörjarbok. Författaren startar från en ganska avancerad nivå, och han måste nog sägas ha väl höga tankar om »graduates with a first degree in physics or electrical engineering». Men för en fysiker, som är ordentligt hemmastadd i elektricitetslära, är läsningen av boken en upplevelse. Framställningen är mästerlig och stilen livfull och entusiasmerande.

Boken innehåller tre huvudavsnitt. I det första (ca 90 sidor) behandlas elektronemission (i vidsträckt mening), i det andra (ca 150 sidor) rörens elektronoptik (likaså i vidsträckt mening). I det tredje

avsnittet studeras olika klasser av rör (med undantag av gasfyllda rör och katodstrålerör), varvid lejonparten av framställningen ägnas mikrovågsrören, de huvudsakliga objekten för författarens egen forskningsverksamhet (Beck har tidigare utgivit *Velocity-Modulated Thermionic Tubes,* Cambridge Univ. Press 1948). Rörtillverkning behandlas inte; »design» innefattar alltså inte fabrikation. — Det digra arbetet, som troligen kommer att bli klassiskt, avslutas med ett mycket magert register. *Torsten Jönsson*

J. Yarwood, *High Vacuum Technique. Theory, Practice, Industrial Applications and Properties of Materials.* 3rd Ed. Chapman & Hall, London 1955, Pp. viii+208, 25s. net.

Yarwoods lilla handbok i vakuumteknik, som kom ut 1943, skrevs förmodligen i syfte att nödtorftigt fylla ett trängande utbildningsbehov i krigsårens England. Boken blev känd i vårt land först i andra editionen (1945), som var något utvidgad och moderniserad men långt ifrån up to date; den anmäldes utan entusiasm i Elementa *31*, 245, 1948.

Boken är i föreliggande tredje edition mycket förbättrad; den är nu en verkligt bra bok. Hänsyn till de sista femton årens intensiva utveckling har tagits i den utsträckning man kan begära i fråga om en handbok i denna storleksklass. *Torsten Jönsson*

A. R. Holowenko, *Dynamics of Machinery.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall Ltd, London 1955, Pp. 464, $ 7.50.

De senaste årtiondenas snabba utveckling inom maskintekniken, kännetecknad av alltmera ökade varvtal och hastigheter samt av en påtaglig övergång till starkt automatiserad drift, har för ingenjörer och tekniker aktualiserat behovet av fördjupade kunskaper om dynamiska förlopp. Den utländska litteraturen på detta område berikas för närvarande ganska snabbt. Nyligen omnämndes exempelvis i dessa spalter Doughtie-James, Elements of Mechanism — Elementa 38 (1955), 76 —, vilken bok dock nästan uteslutande behandlade viktiga maskintekniska rörelseproblem ur enbart kinematisk synpunkt.

Förf. till föreliggande verk, professor Holowenko vid Purdue University, har i mera begränsad omfattning behandlat rörelseproblemens kinematik. Större delen av bokens omfång ägnas åt kraftanalyser av inom maskintekniken aktuella dynamikproblem. Som exempel på dylika må nämnas den allmänna vevrörelsen, kamrörelser, svänghjulsdimensionering och utbalanseringsproblem. Förf. behandlar rätt ingående utbalanseringsfrågor vid förbränningsmotorer, spec. automobilmotorer, av olika utföranden, t. ex. raka motorer, V-motorer och stjärnmotorer. Dessutom innehåller boken värdefulla avsnitt om svängningar vid axlar, kritiska varvtal och torsionssvängningar. Fram-

ställningen avslutas med ett kort kapitel om gyralkrafter och gyralmoment.

Verket kan anses som en lärobok i teknisk dynamik för högskolestadiet. Högre matematik har sålunda icke på något sätt undvikits men förekommer ej heller i anmärkningsvärd utsträckning eller i någon svårare form. Däremot förutsättes, att läsaren har vana vid vektorer och grafiska metoder. Enhetssystemet är rent tekniskt. Bokens förtjänster ligger i förf:s utmärkta behandling av verkligt aktuella rörelseproblem inom maskintekniken, det stora antalet väl valda övningsexempel (tyvärr utan angivna svar) och den förnämliga yttre utformningen. *Elis Dahlin*

Max Pollermann, *Bauelemente der physikalischen Technik. Entwurf und Aufbau physikalischer Geräte für Forschung und Unterricht.* Springer 1955, viii+276 S., DM 28.—.

Föreliggande handbok i instrumentkonstruktionsteknik, utarbetad av en mångsidigt erfaren konstruktör och avsedd främst för universitetsfolk (experimentalfysiker och andra experimentellt arbetande naturvetare) representerar såvitt anmälaren har sig bekant något absolut nytt vad handböcker i fysikalisk apparatteknik beträffar. Konstruktionselement och konstruktionsprinciper behandlas i anslutning till ingenjörsmässigt utförda figurer, som visa hur detaljerna se ut i verkligheten. Fysikern, i allmänhet föga tekniskt förfaren, får sålunda av denna bok betydligt effektivare hjälp än av handböcker av vanlig typ med deras schematiska figurer; boken torde också göra det lättare för honom att få sina intentioner förstådda i verkstaden. Antalet figurer är drygt tusen!

Boken är intressant att studera även om man har små eller inga möjligheter att praktiskt omsätta därur förvärvad kunskap. Läroverkens lärare kunna sålunda också ha glädje av den.

Torsten Jönsson

Friedrich Münzinger, *Atomkraft.* Eine Studie über die technischen und wirtschaftlichen Aussichten von Atomkraftwerken. Für Ingenieure, Energiewirtschaftler und Volkswirte. Springer 1955, vi+94 S., DM 10,50.

Föreliggande bok, baserad på amerikanska och engelska publikationer och utarbetad med anledning av den förestående atomtekniska spelöppningen i Förbundsrepubliken Tyskland, är ett förträffligt kompendium i atomkraftteknik och särdeles lämplig för den som vill ha en föga tidskrävande men vederhäftig orientering.

Arbetet är ingalunda ett rent kompilat. Författaren saknar visserligen egna erfarenheter av reaktorkonstruktioner och atomkraftverksbyggen men han räknas till samtidens främsta experter på stora värmekraftverk. *Torsten Jönsson*

JOHN C. WEST, *Servomechanics*. English Univ. Press, London 1953, Pp. 238, 25s. net.

Föreliggande arbete är en lärobok; den innehåller bl. a. ett mindre antal vid universitetet i Manchester givna tentamensuppgifter i servoteknik.

De inledande kapitlen behandla ett typiskt servosystems mekanik med särskild hänsyn till stabilisering genom viskös dämpning eller mot hastigheten proportionell elektrisk motkoppling, den elektriska analogi som medger en lättare reglerbar och praktiskt mera tilltalande lösning.

Servosystemet som elektriskt nät ansluter på ett naturligt sätt, och tillfälle erbjuder sig här att draga nytta av den redan utvecklade teori, som brukar behandlas i teleteknisk undervisning. Operatorräkning användes redan från starten, och de elektroniska hjälpmedlen introduceras gradvis utan någon tråkig kompilering i specialkapitel. Stort utrymme ägnas åt reduceringen av eftersläpning samt stabiliteten; Hurwitz' algebraiska kriterium på rötternas tecken utvecklas beträffande ekvationer av tredje och fjärde graden, och Nyquists bekanta kriterium diskuteras med exempel. Sambandet mellan amplitud- och faskurvor hos en förstärkare ägnas flera sidor. Den i teletekniken aktuella Hilbert-transformationen lägges som grund för grafisk behandling, vilken dock synes vara högst approximativ.

Bokens senare hälft omfattar tillämpningar. Lägeskontrollen har redan förut diskuterats. Nu upptages hastighetskontrollen med velodynen som konkret modell. Senare komma syngonapparater, och författaren närmar sig därmed elektromaskinläran (kombinerad med elektronik). Vilande och roterande förstärkare behandlas på beskrivande sätt (metadynen, amplidynen m. fl.). Servomotorn avfärdas kanske väl kortfattat, och takten sättes upp mot slutet, där lägeskontrollens noggrannhet m. fl. detaljer återfinnas.

Wests bok synes vara en god, ehuru relativt krävande introduktion. Det är med hänsyn till ämnets relativa nyhet naturligt, att eventuellt kommande upplagor kunna förväntas bli mera lättlästa. *E. T. Glas*

Traité de chimie organique. Publié sous la direction de Victor Grignard, G. Dupont et R. Locquin. Masson et Cie, Paris 1954. Tome XXIII: 86+360 p., 8600 fr.

Band XX och XXII av detta stora franska verk ha tidigare refererats i Elementa (mars 1954). Band XXIII, som utgör slutbandet, består av sakregister till samtliga band (360 sid.) samt innehåller dessutom ett par kapitel som egentligen borde ha tillhört band XXI, nämligen kondenserade pyrimidinderivat, varav puringruppen fått ett särskilt kapitel.

Varje kapitel har en rätt omfattande litteraturförteckning, som innehåller citat till och med år 1953 eller början av 1954. En formell anmärkning måste göras mot att författaren bibehållit det ytterst seglivade skrivsättet med pyrimidinringen formad som en rektangel i stället för en sexhörning. Att skriva just denna sexring som en rektangel är kanske — för att citera en av mina lärare — »en uppfinning av någon lat typograf i början av århundradet».

Utgivandet av den franska jättehandboken med dess 23 band har pågått i ca 20 år. En oundviklig följd härav är att många band ha blivit rätt föråldrade, vilket också visar sig, om man letar i generalregistret efter en del på senare tid upptäckta substanser. Som ett standardverk i systematisk organisk kemi förtjänar dock »Traité de chimie organique» sin plats på ett bibliotek. *Gösta Lindstedt*

R. R. Slaymaker, *Bearing Lubrication Analysis.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1955, Pp. 108, $ 5.00.

Föreliggande bok är närmast avsedd för maskinkonstruktören och för den, som skall beräkna lager och deras smörjning i maskiner och motorer. Även självsmörjande lager hör hit. Upphettningen av ett lager under arbete är en viktig faktor, som måste beräknas och behärskas.

Om man bortser från svårigheten för oss i gamla världen att tänka i F°, pounds, inches och »Degrees API», är boken en både koncentrerad och klar handledning i sitt ämne, försedd med numeriska exempel, hämtade från verkligheten. Omfånget uppgives svara mot en termins kurs i ämnet vid amerikansk ingenjörsutbildning. *J. Tandberg*

R. Krzikalla, *Rechentafeln zur chemischen Elementaranalyse.* Verlag Chemie, Weinheim 1956, 232 S., DM 12.—.

Tabellens uppgift är att underlätta beräkningen av en förenings procentuella halt av ingående element, när formeln är given, och omvänt, att ställa upp en formel när procenthalter av ingående element är givna.

Beräkning med tabellen ger en tidsvinst och större säkerhet jämfört med användandet av en logaritmtabell, då en del räkneoperationer bortfaller. I många laboratorier torde därför den billiga, trevligt bundna boken vara av värde. Men i laboratorier, där många dylika beräkningar görs, torde en räknesnurra betala sig bättre i längden. Bihangstabellerna är till god nytta.

Tjugu på måfå utvalda siffror som jämfördes med Gysels »Prozenttabellen organischer Verbindungen» avslöjade inga tryckfel.

W. Kirsten

H. E. Fierz-David, *Die Entwicklungsgeschichte der Chemie.* 2. Aufl. Verlag Birkhäuser, Basel 1952. 429 S., 106 Abb., kr. 33:70.

Detta är en bok om kemins utveckling — inte kemins historia framhåller författaren, som i 35 år var verksam som professor i kemisk teknologi i Zürich. Den ofta originella, alltid livfulla skildringen belyses med många citat och utmärkta bilder från de epoker, som författaren anser ha haft betydelse för vetenskapen.

En stor del av arbetet ägnas åt alkemins symboliska tänkesätt. Bland annat av intresse kan nämnas t. ex. ett utförligt referat av Boyles The Sceptical Chymist, Kekules frispråkiga berättelse om strukturteorins uppkomst samt redogörelsen för Cannizzaros alltför litet kända ingripande i striden om de kemiska formlerna. I samband med detta kritiseras Berzelius, »der diktatorische Herrscher im Reiche der Chemie» rätt fränt och inte alldeles rättvist. Hans nomenklatur betecknas som ett mästerstycke, som han dock själv förstörde med dubbelatomerna, »ein Verschleierungsmanöver»! Värt att läsa och att begrunda!

Avslutningskapitlet om den moderna tillämpade kemin är av hög klass. I bihang redogöres för analysmetodernas utformning och för grundämnenas upptäckt, det senare ibland vårdslöst. Typografi, papper och bindning hedra den schweiziska bokindustrien.

Bertil Englund

Hermann Mohler, *Elektronentheorie der Chemie,* Sauerländer Verlag, Aarau 1946, 192 S., 50 Abb., kr. 18:90.

Författaren vill se fysikalisk kemi som en förmedlare mellan fysikerns och kemistens tänkesätt och anser, att just elektronteorin för de kemiska föreningarna är ett utmärkt hjälpmedel därvid. Han ger här en särdeles klar exposé över utvecklingen av föreställningarna om atomernas byggnad och den kemiska bindningen. Med rätta framhålles, att den atommodell, som kemisten nu behöver, inte får vara den klassiska med individuella elektroner i preciserade banor osv. Den vågmekaniska modellen är visserligen mindre påtaglig och »begriplig», men den ger inte så lätt felaktiga associationer som den alltfort populära planetatomen gör. En intresserad yngling, som lärt sig »atomteori» undrade, hur en elliptisk atom reagerade: han hade uppfattat de Sommerfeldska ellipsbanorna som en materiell realitet! Ett studium av Mohlers bok kan ge oss en riktigare uppfattning av materien.

Bertil Englund

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2041) *I triangeln ABC, där r är radien i den in-, r_a radien i den vid sidan BC vidskrivna cirkeln, drages en transversal genom A, som skär BC i D mellan B och C. Sök ett samband mellan radien x i den i triangeln ABD inskrivna och radien y i den vid DC i triangeln ADC vidskrivna cirkeln, som endast innehåller de givna storheterna.* *X.*

2042) *Normalerna mot de linjer, som innehålla sidorna BC, CA och AB i triangeln ABC från en punkt P i rymden, råka dessa linjer i resp. A_1, B_1 och C_1. Vilken relation råder mellan vinklarna AA_1C, BB_1A och CC_1B? Sök med hjälp av sambandet orten för P, då vinklarna BB_1A och CC_1A äro lika.* *N. J.*

2043) *Punkterna A, B, C, D ligga på en rät linje i angiven bokstavsföljd. Man sätter $AB=x$, $BC=y$, $CD=z$ och förutsätter att $x(x+y)=z^2$ och $y(y+z)=x^2$. Visa, att x, y och z kunna vara sidor i en triangel. Beräkna dess vinklar.* *Efter Archimedes.*

Enklare matematiska uppgifter[2]

2044) Lös ekvationen $0{,}3(\operatorname{tg} x+\cot x)=\sin 2x+\cos 2x$.

Svar: $13{,}28^\circ+n\cdot 90^\circ$; $-35{,}78^\circ+n\cdot 90^\circ$.

2045) I en likbent triangel är basen a och benen b. I vilket förhållande delas triangelns yta av höjden mot en av de lika sidorna?

Svar: $a^2:(2b^2-a^2)$. Villkor: $a<b\sqrt{2}$.

2046) I triangeln ABC delar höjden från A sidan BC innantill i förhållandet 3 : 10 från C räknat. Höjden från B delar AC i förhållandet 1 : 5 från C räknat. Bestäm triangelns vinklar.

Svar: $A=45^\circ$; $B=56{,}31^\circ$; $C=78{,}69^\circ$.

2047) Hypotenusan i en rätvinklig triangel är a och ytan T. En cirkel går genom den räta vinkelns spets och tangerar hypotenusan i dess mittpunkt. Visa, att cirkelns radie är $a^3/16T$.

2048) En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel, varvid $AB=BC=a$, $CD=x$, $DA=y$ och $BD=d$. Visa, att $xy=|d^2-a^2|$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 2044—2047, 2052—2053 äro insända av *S. B.*, 2048—2051 av *Ph.*

2049) Visa, att den cirkel, som går genom två hörn och höjdernas skärningspunkt i en triangel, är lika stor som den kring triangeln omskrivna cirkeln.

2050) Man väljer tre olika stora positiva tal a, b och c. Visa, att ekvationen $(b+c-a)x^2-2bcx+abc=0$ alltid har två olika stora, positiva rötter, om $a<b<c$.

2051) I en ellips drages en korda AB parallellt med storaxeln. Tangenterna i A och B råkas i C. Visa, att cirkeln genom A, B och C går genom ellipsens brännpunkter.

2052) Genom en rörlig punkt P på kurvan $y=x^2$ dragas kordor PA och PB med vinkelkoefficienterna 0 och 1. Sök orten för mittpunkten av AB. Visa, att AB är tangent till orten.

Svar: $4y=4x^2+1$.

2053) Man har $y=3(\operatorname{tg} x-\cot x)+\frac{1}{3}(\operatorname{tg}^3 x-\cot^3 x)$. Visa, att $y'=16\sin^{-4}2x$.

Lösningar till uppg. 2015—2017

2015) *För vilka konstanter a, b, c och d är identiskt $x^4-ax^3+bx^2-cx+d=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$?* *N. J.*

Av systemet $a+b+c+d=a$ (1), $a(b+c+d)+bc+bd+cd=b$ (2), $abc+abd+bcd+acd=c$ (3), $abcd=d$ (4) erhålles enl. (4) $d=0$ (5) och $abc=1$ (6). Ekv. (5) ger enl. (3) dels $c=0$ dels $ab=1$; $c=0$ ger enl. (1) $b=0$ och ett obestämt värde på a. En första lösning är alltså $x^4-ax^3=0$. Ekv. $ab=1$ ger enl. (2) $1+ac+bc=b$ och enl. (1) $b+c=0$. Härav fås $(b=0)$ och $b=-1$, $a=-1$ och $c=1$. En andra lösning är $x^4+x^3-x^2-x\equiv x(x+1)(x+1)(x-1)=0$. Det återstår att lösa systemet $b+c+d=0$ (1), $bc+bd+cd=b$ (2), $d(ab+bc+ac)=c-1$ (7), $abc=1$ (6). Elimineras a och d, erhålles $bc-(b+c)^2=b$ (8) och $(b+c)(1/c+bc+1/b)=1-c$ eller $(b+c)^2+b^2c^2(b+c)=bc(1-c)$. Enl. (8) fås $bc-b+b^2c^2(b+c)=bc-bc^2$, varav $(b=0)$ och $c^2(1+bc)=1-b^2c^2$, som ger $bc=-1$, $a=-1$ och $c^2=1-bc$ (10). Ekv. (8) och (10) ge $b^2+b+1=0$; imaginära rötter. Ekv. $bc=-1$ ger enl. (8) $b^4+b^3-b^2+1\equiv(b+1)(b^3-b+1)=0$ dvs. $b=-1$, $c=1$ (se ovan) och $b^3-b+1=0$, som har den reella roten $b=-1{,}325$. Till sist blir $c=0{,}755$, $d=0{,}570$ och lösningen $x^4+x^3-1{,}325x^2-0{,}755x+0{,}570=0$. *E. Samén*

2016) *På sidorna i en vid A rätvinklig triangel uppritas utåt liksidiga trianglar ABC_1, BCA_1 och CAB_1. Visa, att om triangeln $A_1B_1C_1$ är rätvinklig vid C_1, så är $\operatorname{tg}^2 C+\operatorname{tg}^2 A_1=1$.* *I. Gunsjö*

Den givna triangelns sidor äro $2a$, $2b$ och $2c$, $b>c>0$, deras mittpunkter A_2, B_2 och C_2. Vi släppa först antagandet, att de uppritade trianglarna äro liksidiga. I stället få A_1, B_1 och C_1 beskriva resp. sidors mittpunktsnormaler med mot dessa sidor proportionella hastigheter, varvid de starta samtidigt från A_2, B_2 och C_2 och röra sig utåt ($k>0$) eller inåt ($k<0$). Projektionen av A_1 på A_2B_2 är A_3. För $\overline{A_2A_1}=ka$, $\overline{B_1B_2}=kb$, $\overline{C_1C_2}=kc$ blir $\overline{A_2A_3}=kb$ och $\overline{A_3A_1}=kc$. Med A i origo, B och C på positiva x- resp. y-axeln erhålles $A_1(c+kb;\, b+kc)$, $B_1(-kb;\, b)$, $C_1(c;\, -kc)$. Om C_1A_1 och C_1B_1 bilda 90°, blir $(b^2-2c^2)k^2-2bck-b^2=0$ (1), ekvivalent med $k^2c^2+(kc+b)^2=k^2b^2$ (2) dvs. $A_3A_1{}^2+C_1A_2{}^2=A_2A_3{}^2$. Det inträffar således i allmänhet (1), att $A_1B_1C_1$ är rätvinklig i C_1 för två värden på k. Då ligga A_1, B_1, C_1, A_3 på samma cirkel, så att $\operatorname{tg}^2A_1=\operatorname{tg}^2A_2A_3C_1=C_1A_2{}^2:A_2A_3{}^2$. Emedan $\operatorname{tg}^2C=A_3A_1{}^2:A_2A_3{}^2$ följer påståendet ur (2). För $k=\pm\sqrt{3}$ ger (1) $c:b=(\sqrt{15}\mp\sqrt{3}):6$. Det finns alltså två i A rätvinkliga trianglar ABC för vilka $C_1=90°$, när ABC_1 etc. skola vara liksidiga. De äro vända utåt för det övre, inåt för det undre tecknet. *X.*

2017) *I ekvationen* $A_1\cot(x-\alpha_1)+A_2\cot(x-\alpha_2)+\ldots+A_n\cot(x-\alpha_n)=0$ *äro* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *alla positiva; storheterna* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *äro olika och ligga mellan 0 (inklusive) och* π *(exklusive). Visa, att ekvationen har* n *distinkta rötter* $x_1, x_2 \ldots x_n$ *belägna i nämnda intervall. Beräkna* $x_1+x_2+\ldots+x_n$ *på en multipel av* π *när.* *X.*

1. Om $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$, ser man, att ekvationen har en rot i varje intervall $\alpha_r-\alpha_{r+1}$, ty vänstra ledets derivata är negativ i hela intervallet och ledets värde avtar från $+\infty$ till $-\infty$, när x växer från x_r till x_{r+1}. Detta ger $n-1$ rötter. Då ekvationen är av n:te graden (i allmänhet) i $\cot x$, är även n:te roten reell. Om $\Sigma A_r\cot\alpha_r=0$, sjunker gradtalet till $n-1$, men då är $x_1=0$ en enkel rot (svarande mot $\cot x=\infty$).

2. Efter bortskaffande av nämnarna och homogenisering kan ekvationen skrivas $F(\cos x,\, \sin x)=[A_1\,(\cos x\cos\alpha_1+\sin x\sin\alpha_1):(\sin x\cos\alpha_1-\cos x\sin\alpha_1)+\ldots]\prod_1^n(\sin x\cos\alpha_r-\cos x\sin\alpha_r)=0$. Men F kan också skrivas $F=K\prod_1^n\sin(x-x_r)=K\prod_1^n(\sin x\cos x_r-\cos x\sin x_r)$, där K är en reell faktor $\neq0$, vars värde f. ö. är likgiltigt. Man kan i de bägge uttrycken för F insätta vilka värden man vill i stället för $\cos x$ och $\sin x$, lämpligen $\cos x=i$, $\sin x=1$. Då erhålles $i(A_1+A_2+\ldots A_n)[\cos\Sigma\alpha_r-i\sin\Sigma\alpha_r]=K[\cos\Sigma x_r-i\sin\Sigma x_r]$, varav $(A_1+A_2+\ldots+A_n)\sin\Sigma\alpha_r=K\cos\Sigma x_r$ och $(A_1+A_2+\ldots+A_n)\cos\Sigma x_r=-K\sin\Sigma x_r$. Division ger $\cot(x_1+x_2+\ldots+x_r)=-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$ dvs $\Sigma x_r=\Sigma\alpha_r+\frac{1}{2}\pi+n\pi$. *X.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1956

Matematiska uppgifter för latingymnasiet[1]

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan -2 och kvoten 5 gånger så stor som kvadraten på den första termen. Bestäm seriens första term.
2. Lös ekvationen

$$\frac{2}{9x^2-12x+4}+\frac{6}{3x^2+x-2}=\frac{5}{3x^2-2x}$$

3. Sidorna i en triangel är 8 cm, 8 cm och 12 cm. I den kring triangeln omskrivna cirkeln drages en korda, som halverar de båda lika stora sidorna. Hur lång är denna korda, och hur stort är dess avstånd från cirkelns medelpunkt?
4. I triangeln ABC är vinkeln A 60°. Bisektrisen till vinkeln B skär sidan AC i punkten E, så att AE är 8 cm och EC 7 cm. Beräkna sidan AB.
5. I triangeln ABC är sidan AB 10 cm och vinklarna A och B 40° respektive 122°. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar sidan AB och de båda andra sidornas förlängningar.
6. I parallellogrammen $ABCD$ är diagonalen AC 6 cm och diagonalen BD 10 cm. Vinkeln ABD är 33°. Beräkna sidorna AB och BC.
7. Två höjder i en triangel är 12 cm och 15 cm. Den förra halveras av den senare. Bestäm triangelns sidor.
8. I ett likbent parallelltrapets är var och en av de icke parallella sidorna lika stor som den ena av de parallella. Trapetsets omkrets är 24 cm. Uttryck längden ($=y$ cm) av en av trapetsets diagonaler som funktion av längden ($=x$ cm) av en av de lika stora sidorna. Åskådliggör sambandet mellan x och y grafiskt genom att insätta värden på x och bestämma de motsvarande värdena på y. Ange, inom vilket intervall x kan variera, och bestäm slutligen med hjälp av diagrammet det största värde, som y kan anta.

[1] Uppg. i matem. för allm. linjen vid Uppsala enskilda lärov. utgjordes av latingymnasiets nr 2, 3, 5, 7 och nr 8 med *beräkning* av max. samt realgymnasiets (allm. kurs) nr 1, 3, 4.

Uppg. för nyspråkligt gymnasium utgjordes av latingymnasiets nr 2—5, 6—8 och allm. kurs nr 2.

Resultat: 1. $-0{,}4$. 2. $x_1=1$; $x_2=2$. 3. Längd och avstånd resp. 10 cm och $\frac{1}{9}\sqrt{567}=3{,}402$ cm. 4. 24 cm eller 40 cm. 5. $10:(\cot 70°+\cot 29°)=4{,}612$ cm. 6. AB och BC är resp. 5,453 cm och 6,187 cm eller 2,934 cm och 7,706 cm. 7. $\sqrt{300}=17{,}321$ cm, $\sqrt{252}=15{,}875$ cm, $\sqrt{192}=13{,}856$ cm. 8. $y=\sqrt{72-2(x-6)^2}$ med villkoret $4\leqq x\leqq 8$; $y_{\max}=\sqrt{72}=8{,}485$ för $x=6$. Två gränsmin.=8, för $x=4$, då trapetset urartat till en dubbelsträcka=12, och för $x=8$, då det urartat till en liksidig triangel.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet

Allmän kurs

1. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är sidorna AD och BC parallella. Hörnen A, B och C är belägna i punkterna (0; 1), (0; 6) respektive (7; 7). Bestäm koordinaterna för hörnet D.
2. I en parallellogram $ABCD$ bildar mätetalen för sidorna AB och BC samt diagonalerna BD och AC i nämnd ordning en geometrisk serie. Bestäm parallellogrammens vinklar.
3. Konstruera kurvan $y=x^3-3x^2$ i dess huvuddrag. Genom origo går två tangenter till kurvan, av vilka den ena är x-axeln. Ange ekvationen för den andra. Finns det någon tangent, som är parallell med den sistnämnda tangenten? Ange i så fall även dennas ekvation.
4. Basytan i en pyramid är en kvadrat med sidan 6 cm. Två sidokanter är 5 cm och två 7 cm långa. Vilka vinklar bildar pyramidens sidoytor med basytan?
5. Vilket eller vilka villkor skall vinklarna A och B uppfylla, för att likheten $\sin A+\sin B=\sin(A+B)$ skall gälla?
6. Genom origo i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje L, som bildar en vinkel α — räknad i positiv led — med positiva x-axeln. Från punkten A_0 $(a;\ 0)$, där a är en positiv konstant, fälles normalen L' mot L. Från punkten A_0 drages vidare parallellt med y-axeln en linje, som skär linjen L i punkten A_1. Från punkten A_1 drages parallellt med x-axeln en linje, som skär linjen L' i punkten A_2. På detta sätt fortsätter man och erhåller en serie punkter A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_n, så belägna att varannan ligger på linjen L', varannan på linjen L, och att av sammanbindningslinjerna mellan två på varandra följande punkter varannan är parallell med y-axeln, varannan med x-axeln. Undersök för olika värden på vinkeln α mellan 0° och 180°, hur den brutna linjen $A_0A_1A_2A_3$ ... A_n är beskaffad, när n växer obegränsat. Ange speciellt, om punkten A_n närmar sig till en bestämd punkt. Bestäm i så fall också koordinaterna för denna punkt.

7. Ett klotsegments kalott är 16π cm^2. Vilken form skall segmentet ha, för att dess volym skall vara så stor som möjligt, och hur stor är då volymen? Undersök därjämte och åskådliggör grafiskt, hur segmentets volym varierar, när dess höjd ändras.
8. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(a;\ 0)$, där a är en konstant. Hörnet B ligger i punkten $(0;\ 1)$, medan hörnet C genomlöper x-axeln. Den kring triangeln ABC omskrivna cirkelns medelpunkt är D. Bestäm ytan av triangeln ADC som funktion av abskissan för punkten C, och undersök densamma för olika värden på konstanten a med angivande av eventuella maxima och minima. Åskådliggör slutligen, hur den nämnda ytan varierar, genom att i olika koordinatsystem och i stora drag upprita motsvarande kurva i de huvudfall, som kan särskiljas.

Resultat: 1. $D\,(8{,}4;\ 2{,}2)$. — BC:s mittnormal går genom AD:s mittp. 2. 79,97° och 100,03°. 3. Tangenternas ekv. är $9x+4y=0$ och $9x+4y-2=0$. — Om tangenten genom origo har ekv. $y=kx$, skall ekv. $kx=x^3-3x^2$ ha två lika rötter. De befinnas vara $\frac{3}{2}$, varav $k=-\frac{9}{4}$. Då den första tangenten går genom max.p. (origo), måste den andra p. g. a. kurvans symmetriegenskaper gå genom min.p. $(2;\ -4)$. 4. 75,52°; 37,76°; 52,24°; 52,24°. 5. Man finner att åtminstone en av vinklarna A, B, $A+B$ skall vara en multipel av 360°. 6. Om $\operatorname{tg}\alpha=k$, blir $x_{2n}=x_{2n+1}=a-ak^2+ak^4-\ldots+(-1)^n\cdot k^{2n}$. För $|k|<1$ är $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a:(1+k^2)$ samt $\lim\limits_{n\to\infty} y=ak:(1+k^2)$, dvs. punkten A_n närmar sig linjernas skärningsp. För $|k|>1$ vindlar spiralen sig ut mot ∞, och för $|k|=1$ genomlöper A_n en kvadrat. 7. Volymen växer med segmentets höjd från noll till max. $32\pi\sqrt{2}:3$ cm^3, då segmentet är ett halvklot, för att sedan avta till gränsmin. $32\pi:3$ cm^3, då segmentet är ett klot. Höjden kan ej överstiga 4 cm. 8. Om C:s abskissa är x, blir ytan $y=\pm\frac{1}{4}(x-a)(ax+1)$, som representerar parabelbågar. För växande värden på x avtar ytan från ∞ till 0 för det av värdena a eller $-1:a$ som är negativt, växer till ett max. $(a^2+1)^2:16|a|$, avtar sedan till 0 och växer slutligen till ∞. Om $a=0$, är ytan $y=\pm\frac{1}{4}x$, som representerar två halvstrålar.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet

Specialkurs

1. Två rektanglar har lika stora ytor. Den enas diagonaler ligger utefter asymptoterna till en viss hyperbel, och ett par motstående sidor tangerar denna hyperbel. I den andra rektangeln utgöres ett par motstående sidor av samma hyperbels parametrar. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.

2. En parabels vertex ligger i punkten (2; −4), och dess axel är parallell med y-axeln. Parabeln tangerar den räta linjen $x+y=0$. Bestäm dess ekvation.
3. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y=\dfrac{ax^2+3x+b}{ax-b}$, så att den motsvarande kurvan får asymptoterna $x+3=0$ och $x-y+4=0$. Upprita därefter kurvan.
4. Två punkter, A och B, på jordytan är belägna diametralt motsatt varandra på samma nordliga latitud. Visa, att för den som skall flyga från A till B blir vägen kortare, om han följer storcirkeln över nordpolen, än om han följer parallellcirkeln. Ange även, på vilken latitud A och B skall ligga, för att skillnaden i flygväg skall vara så stor som möjligt. Jordytan antages vara sfärisk. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man grafiskt åskådliggör, hur den nämnda skillnaden varierar, när latituden ändras.
5. En triangel har två av sina hörn i brännpunkterna till en ellips och det tredje i en punkt P på ellipsen. Bestäm geometriska orten för den i triangeln inskrivna cirkelns medelpunkt, när P beskriver ellipsen.
6. Visa, att kurvan $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ skär x-axeln oändligt många gånger samt att det mellan två successiva skärningspunkter finns en punkt, där kurvan tangerar endera av linjerna $y=x$ och $y=-x$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar kurvan i dess huvuddrag och särskilt att man därvid studerar densamma, när $x\to 0$ och $x\to\pm\infty$.
7. I en sfär med medelpunkten O och radien 1 längdenhet är AB en diameter. Utefter AB lägges en koordinataxel med O som origo, så att punkten A får koordinaten $x=1$. En rät cirkulär dubbelkon med toppvinkeln 60° lägges med axeln utefter AB, så att dubbelkonens spets faller i en punkt P med koordinaten x på AB eller dess förlängning. Uttryck som funktion av x den del av den koniska ytan, som faller inom sfären. Studera denna funktion, och bestäm speciellt dess eventuella maxima och minima. Upprita slutligen den motsvarande kurvan. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man närmare undersöker funktionen och dess kurva för värdena $x=\pm 1$.

Resultat: **1.** 76,34°. **2.** $(x-2)^2=-8(y+4)$. — Punkten (2; −2), i vilken två vinkelräta tangenter råkas, tillhör styrlinjen; därav parametern $=8$. **3.** $a=\frac{3}{7}$, $b=-\frac{9}{7}$. Kurvan är en hyperbel inom de trubbiga vinklarna mellan asymptoterna. **4.** På latitud 39,54° N. — Om jordradien $=1$ och latituden v radianer, blir vägskillnaden $\pi\cos v-(\pi-2v)$, som växer från 0 till max. 0,66 för 0,69 radianer ($=39{,}54°$) för att avta till 0° för

$v=\frac{1}{2}\pi$. **5.** Orten är ellipsen $b^2x^2+(a+c)^2y^2=b^2c^2$. — Om F_1 och F_2 är brännp., I $(x_0;\ y_0)$ den inskrivna cirkelns medelp., P $(x_1;\ y_1)$, och man använder sambandet $r=T:p$, blir $y_0=cy_1:(a+c)$ och $x_0=(p-PF_1)-c=$ $=[a+c-(a-ex_1)-c]=cx_1:a$, osv. **6.** Kurvan har y-axeln till symmetriaxel och $y=1$ till asymptot; när $x\to 0$, går $y\to 0$. Kurvan skär positiva x-axeln (förutom i $x=0$) i punkterna $X_n=1:n\pi$ $(n=1, 2, 3\ldots)$. Sammanställning av kurvans ekv. med $y=\pm x$ ger (förutom $x=0$) $\sin\frac{1}{x}=\pm 1$ med rötterna $1:x_n=\frac{1}{2}\pi+n\pi$, där $n=0, 1, 2, 3\ldots$, dvs. $x_n=1:(0{,}5+n)\pi$, som alltså är x-koord. för de för kurvan och linjerna gemensamma punkterna. Insättning av $\sin\frac{1}{x}=\pm 1$ i derivatan visar att punkterna x_n är tangeringsp. Mellan två på varandra följande X_n-värden, $1:n\pi$ och $1:(n+1)\pi$, ligger en tangeringsp., $1:(0{,}5+n)\pi$. **7.** För $|x|\leqq 1$ blir ytan $y=\pi(1+\frac{1}{2}x^2)$. För $1\leqq|x|<2$ erhålles $y=\frac{1}{2}\pi\sqrt{3x^2(4-x^2)}$; $y_{\min}=\pi$ för $x=0$, $y_{\max}=\pi\sqrt{3}$ för $x=\pm\sqrt{2}$. Funktionens derivator har för $x=1$ och $x=-1$ värdena π resp. $-\pi$.

Uppgifter i fysik

1. En skridskoåkare, som nått en viss hastighet, gled därefter av blotta farten 25 m, innan han stannade. Med ett stoppur bestämde han, att detta tog 15 sek. Beräkna härav friktionskoefficienten mot isen, under antagande att vindstilla rådde. Luftens motstånd mot rörelsen kan lämnas utan avseende.
2. En liten ring med massan m gram kan glida längs en smal, vertikal stång. I ringen fästes en fin tråd, som sedan lägges över en liten trissa, vilken är vridbar kring en axel, som är vinkelrät mot planet genom stången och trissan. I trådens andra, fritt nedhängande ända fästes en vikt med massan $3m$ gram. Ringen hålles först i sådant läge, att tråden blir horisontell mellan ringen och trissan. Längden av den horisontella delen av tråden är då a cm. Sedan släppes ringen, varvid den glider ett stycke nedåt längs stången, vänder och slutligen intager ett jämviktsläge. Hur stort är avståndet mellan nyssnämnda vändpunkt och jämviktsläget? Friktionen och trissans massa lämnas utan avseende. Figurer kräves.
3. I ett rum med 48 m² golvyta skall elektriskt ljus installeras, och man önskar, att belysningen på golvet skall bli i genomsnitt 75 lux. Man skall använda glödlampor, som har ett ljusutbyte av 15 lumen per watt. På grund av ljusabsorptionen i armatur, väggar och tak kan anordningens totala verkningsgrad ej sättas högre än 60 %. Vad blir i kWh den årliga energiåtgången för denna anläggning, om belysningen används 1400 timmar om året?

4. Ett 30,0 cm långt provrör har plan botten, i vilken ett märke gjorts. Röret hålles vertikalt, och över mynningen är lagd en tunn plankonvex glaslins med den plana ytan nedåt. Om röret belyses underifrån, erhålles på en horisontell skärm ovanför linsen en tydlig bild av märket, när avståndet mellan skärmen och linsen är 34,0 cm. Om provröret fylles till randen med en viss vätska, måste skärmen flyttas till avståndet 58,0 cm från linsen, för att en tydlig bild av märket skall uppkomma. Beräkna härav vätskans brytningsexponent. Figur över strålgången kräves. Man får därvid anse märket punktformigt och beläget på linsens optiska huvudaxel.
5. På en optisk bänk var i ordning uppställda en belyst skala, en tunn spridningslins och en konkavspegel. Skalan var vinkelrät mot linsens och spegelns gemensamma optiska axel, och spegelns konkava yta var vänd mot linsen. Avståndet mellan skalan och spegeln var 470 mm. Om linsen flyttades så, att dess avstånd från skalan blev 320 mm, erhölls efter brytning i linsen, reflexion i spegeln och återigen brytning i linsen en bild av skalan, som föll på själva skalan. Beräkna linsens brännvidd, om spegelns radie är 250 mm. Figur med strålgång kräves, varvid linsen kan ritas som en rät linje. Föremålet kan anses punktformigt och beläget i skärningspunkten mellan optiska huvudaxeln och skalan.
6. I en skola undersöktes en importerad elektrisk kastrull, avsedd för 140 V. Den anslöts först till en likströmskälla på 140 V, varvid verkningsgraden blev 80 %. Därefter kopplades kastrullen i serie med ett motstånd, och spänningen höjdes till 220 V. Motståndet avpassades så, att kastrullen fick den spänning den var avsedd för. Beräkna anordningens verkningsgrad.
7. För att kontrollera en voltmeter kopplade man i serie en strömkälla, en kopparcoulometer, ett varierbart motstånd och ett precisionsmotstånd samt anslöt voltmetern till det senare motståndets ändpunkter. Enär man icke kunde bortse från strömmen genom voltmetern, gjordes tvenne mätförsök. I bägge dessa försök hade man med hjälp av det varierbara motståndet inställt voltmetern på 3,300 V. I första fallet var precisionsmotståndets resistans 2 ohm, och på 25 minuter utfälldes därvid i coulometern 0,8542 g koppar. I andra fallet var precisionsmotståndets resistans 3 ohm, varvid på samma tid utfälldes 0,5772 g koppar. Hur mycket skilde sig det avlästa spänningsvärdet från det riktiga? 1 coulomb utfäller 0,3294 mg koppar. Kopplingsschema erfordras.
8. I vardera ändan av en smal, rak kopparstav av 30 cm längd fastlödes en lätt, böjlig koppartråd. Staven upphänges i dessa koppartrådar, så att den hänger horisontellt med sin längdriktning vinkelrät mot det jordmagnetiska meridianplanet och så att koppar-

trådarna är parallella och vardera 100 cm långa. I sina övre, fasta ändar förbindes koppartrådarna med en känslig galvanometer. Staven försättes i pendlande svängningar som en vanlig gunga, så att upphängningstrådarna förblir parallella. Därvid gör galvanometern ett varierande utslag. Beräkna den elektromotoriska kraft, som induceras i kopparstaven i det ögonblick, då den passerar lägsta punkten av sin bana, om koppartrådarna i vändläget omedelbart dessförinnan bildade 30° vinkel med lodlinjen. Jordmagnetismens styrka på orten är 0,49 gauss (kraftlinjer/cm²) och inklinationen 70°. I en ledare, som skär 1 magnetisk kraftlinje per sek, induceras en elektromotorisk kraft av 10^{-8} V. Koppartrådarnas vikt kan försummas i jämförelse med kopparstavens. Från luftmotstånd och friktion bortses. För lösningen behövliga figurer skall återges.

Resultat: 1. 0,023. 2. $\frac{1}{4}a(3-\sqrt{2})=0{,}40a$ cm. — Från utgångsläget A faller ringen, vänder i B och pendlar sedan mellan dessa punkter. Den har ett jämviktsläge i C; om den hejdas i C, förblir den i vila där. $AB=\frac{3}{4}a$ cm och $AC=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$ cm. 3. 560 kWh. 4. 1,37. 5. −145 mm. 6. 51 %. 7. 0,065 V för litet. 8. $22\cdot10^{-6}$ V. Liksom från luftmotstånd och friktion bortser man från den elektromagnetiska bromsningen i fältet.

Realexamen v. t. 1956

Provräkning

1. Lös ekvationen $\dfrac{7}{3x+\frac{1}{2}}-\dfrac{3-x}{2x+\frac{1}{3}}=\dfrac{3x+1}{6x-1}$
2. En person skall den 15 januari till en annan person betala 3600 kr. Han överlater då till denne fyra 3 % obligationer å nominellt 500 kr, alla med ränteterminer den 15 mars och den 15 september. De står i en kurs av 97,5 %. Hur mycket skall han dessutom betala kontant?
3. En cirkel har 2 cm radie. Från en punkt på 4 cm avstånd från medelpunkten drages tangenterna till cirkeln. Hur stor är ytan av den figur, som ligger mellan cirkeln och dessa tangenter? Som värde på π användes 3,14.
4. Bisektriserna till vinklarna A och B i triangeln ABC skär motstående sidor i punkterna D respektive E. Vinkeln ADB är 98° och vinkeln AEB 112°. Bestäm vinklarna i triangeln ABC.
5. En affärsman inköper en vara för 100 kr. Omkostnaderna för lagring och försäljning beräknar han till 12 % av försäljningspriset. Hur många procents pålägg bör han beräkna, om han vill, att hans nettovinst skall uppgå till 8 % av försäljningspriset?

6. Kl. 8.40 cyklade Arne från Lund i riktning mot Torekov, beläget 104 km från Lund. Kl. 12.00 mötte han sin vän Bertil, som hade cyklat från Torekov kl. 10.00. Om Arne hade haft Bertils hastighet och Bertil Arnes, skulle de ha mötts 8 min tidigare än som nu skedde. Sök deras hastigheter.
7. I en rektangel $ABCD$ har man dragit diagonalen AC. Den från B fällda normalen mot AC delar denna i två delar, AE och EC, av vilka den ena är dubbelt så lång som den andra. Bestäm ytan av rektangeln, om BE är 5 cm.
8. Man ville bestämma den inre diametern av ett glasrör. Man mätte då först rörets yttre diameter med mikrometer och fann den vara 8,40 mm. Därefter bestämde man vikten av ett 1 dm långt stycke av glasröret till 7,81 g. Beräkna rörets inre diameter, om 1 cm³ av ifrågavarande glassort vägde 2,5 g. Som värde på π användes $3\frac{1}{7}$.

Resultat: **1.** $x=\frac{1}{3}$. **2.** 1630 kr. **3.** $\sqrt{48}-\frac{1}{3}\pi=2{,}74$ cm². **4.** 36°, 64°, 80°. **5.** 25 % **6.** Arne 18 km/tim, Bertil 22 km/tim. **7.** $15\sqrt{12{,}5}=53{,}03$ cm². **8.** 5,55 mm.

Provräkning i realexamen (avkortad kurs)[1]

1. Lös ekvationen $\frac{9x-0{,}7}{4}-\frac{7x-1{,}1}{3}=\frac{x-0{,}3}{1{,}4}-\frac{0{,}4-2x}{1.2}$
2. Till ett företag sammansköt A, B och C pengar, B 100 kr mer än A och C 100 kr mer än B. En gemensam förlust på 600 kr fördelades efter insatserna. Hur mycket hade var och en tillskjutit, om A förlorade 180 kr?
4. Lös ekvationssystemet $\frac{3x}{5}+\frac{4y}{7}=7\frac{3}{5}$; $\frac{5x}{6}+\frac{3y}{8}=7\frac{5}{8}$
5. Ett arbete skall göras på 10 dagar. Till en början är 18 man sysselsatta därmed, men då 4 dagar har gått, är endast tredjedelen av arbetet utfört. Hur stor behöver arbetsstyrkan vara under den återstående tiden, för att arbetet skall bli färdigt i tid?
6. Ett stycke tyg säljes med 30 % pålägg för 11 kr 5 öre per meter. Vilket skulle priset per meter vara, om man hade räknat med endast 20 % pålägg?

Uppg. 3, 7, 8 utgjordes av uppg. 2, 5, 6 i realex. provet, oavkortad kurs.

Resultat: **1.** $x=0{,}3$. **2.** A, B, C resp. 900 kr, 1000 kr, 1100 kr. **4.** $x=6$; $y=7$. **5.** 24 man. **6.** 10,20 kr.

[1] Provet för huslig linje utgjordes av uppg. 2, 4, 5, 6, 7 i oavkortad kurs och 4, 5, 6 i avkortad kurs. För maskinteknisk linje: uppg. 3, 4, 6—8 i oavk. kurs jämte en andragradsekv. och två stereom. uppg. Av utrymmesskäl måste deras lydelse utelämnas, liksom uppg. för handelslinjen.

Praktisk realexamen v. t. 1956

Uppgifter i fysik för maskinteknisk linje[1]

1. I en träkub, vars kant är 6 cm, borras centralt i ena sidoytan en cylindrisk fördjupning med 2 cm diameter, som fylles med bly. Hur djupt bör hålet vara, för att kuben nätt och jämnt skall flyta i vatten? Tätheten är för trä 0,6 g/cm³ och för bly 11,4 g/cm³.
2. En pojke och hans far bär gemensamt en hink, som med innehåll väger 30 kg. Pojkens arm bildar 45° vinkel och faderns arm 30° vinkel med lodlinjen. Vilken kraft använder vardera? Enkel figur erfordras.
3. Strax bortom ena ändpunkten av en 60 m lång horisontell och rak spårvägsbro ligger en hållplats. Ett spårvägståg, som är 40 m långt och består av tre vagnar, skall bromsas in över bron och har, när första vagnen kommer in på bron, en hastighet av 54 km/tim, och när sista vagnen lämnar bron, en hastighet av 7,2 km/tim. Bromskraften är konstant under hela inbromsningen. Var och en av vagnarna väger 18 ton. Hur stor är bromskraften? Tyngdkraftens acceleration är 9,8 m/sek².
4. I en gastub hälles 4,0 liter flytande syre, varefter tuben tillslutes. Vätskan övergår hastigt i gasform. Vad blir syrgastrycket i tuben uttryckt i at? Tubens volym är 20 liter och temperaturen +17° C. Vid 0° C och 1 at är syrgasens täthet 1,38 kg/m³. Tätheten för flytande syre är 1,13 kg/l.
5. Man vill bestämma specifika värmet för ett vattenlösligt salt. En burk av mässing fylles med saltet och tillslutes med ett skruvlock, som också är av mässing. Burken med lock väger tom 23,8 g och fylld med salt 37,3 g. Burken med innehåll uppvärmes till 99,3° C och nedföres därefter i en mässingskalorimeter. Denna väger 40,9 g och innehåller 212,8 g vatten. Kalorimetervattnets temperatur stiger härvid från 19,5° C till 21,3° C. Beräkna saltets specifika värme, då specifika värmet för mässing är 0,092 cal/g · grad.
6. En elev fick i uppgift att kontrollera en voltmeter med tillhjälp av en rättvisande amperemeter och ett motstånd med resistansen 30,00 ohm. Därjämte fick han veta, att voltmeterns resistans var 1440 ohm. Han kopplade motståndet parallellt med voltmetern och bildade en strömkrets av en strömkälla, amperemetern och den shuntade voltmetern. Amperemetern visade 0,136 A och voltmetern

[1] Provet för kemisk-teknisk linje utgjordes av uppg. 1, 4—8 för maskinteknisk linje jämte en uppg. på tunna linser och en på elektrolys. Provet för teleteknisk linje utgjordes av uppg. 2—8 för maskinteknisk linje jämte tre för linjen avpassade uppg. i ellära.

3,92 V. Hur mycket avvek det avlästa värdet från det rätta? Kopplingsschema erfordras.

7. En pojke äger en modell av en järnvägsanläggning. Anläggningen drives av ett ackumulatorbatteri, vars emk är 12 V och inre resistans mycket liten. Lokomotivet drives med en spänning av 12 V och tar då 1,5 A. För belysning av anläggningen använder han 5 st 12-voltslampor på 3 W vardera och för signaler 8 st 12-voltslampor på 1,5 W vardera. När lok, belysning och signaler — efter det att ackumulatorn sist laddades — varit i full drift i 4 timmar, vill pojken på nytt ladda ackumulatorn. Hur lång tid bör han använda för laddningen, om han använder en likriktare, som lämnar 2,0 A vid tillräcklig laddningsspänning? Ingen hänsyn behöver tas till energiförluster vid laddningen.
8. Jämför kostnaden att framföra ett snälltåg vägande 800 ton, loket inräknat, den 66 km långa järnvägen mellan Stockholm och Uppsala, i det ena fallet med ånglok, i det andra med ellok. Tågen antas gå med jämn hastighet och utan uppehåll. Sammanlagda motståndet mot rörelsen beräknas till 0,6 % av tyngden. Ångloket antas vara uppeldat och klart vid starten. 1 ton ångkol beräknas kosta 80 kr. Kolets bränslevärde är 8000 kcal/kg. Ånglokets totala verkningsgrad är 10 %. Ellokets verkningsgrad antas vara 88 % och priset på 1 kWh 1 öre. 1 kpm = 9,8 Wsek och 1 kcal = 427 kpm.

Resultat: **1.** 2,5 cm. **2.** Fadern 22,0 kp; pojken 15,5 kp. **3.** 6090 kp. **4.** 174 at. **5.** 0,208 cal/g · grad. **6.** 0,08 V för lågt. **7.** 7,5 tim. **8.** Med ånglok 74,20 kr., med ellok 9,80 kr.

Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. Angiv kemiska formler för a) kalciumkarbid b) kvarts c) natriumtiosulfat d) formaldehyd e) svavelkis f) bensoesyra.
2. Angiv fullständiga reaktionsformler, då följande ämnen reagerar med varandra:

   a) $AlCl_3 + NH\,OH =$
   b) $KMnO_4 + SO_2 + H_2O = MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2SO_4$
   c) $Pb + HNO_3 =$
   d) $AgCl + NH_4OH =$

3. Redogör för framställning av a) generatorgas (gengas) b) vattengas. Angiv kemiska sammansättningen för respektive gaser.
4. Vilka ämnesgrupper sammanfattar man under namnet kolhydrater? Angiv någon egenskap, som är karakteristisk för ämnen tillhörande samma grupp.

5. Redogör för en metod för framställning av etylalkohol (etanol).
6. Angiv reaktionsformler för vad som bildas, då vattenlösningar av följande ämnen: a) $CuCl_2$ b) $Zn(NO_3)_2$ c) $SnCl_2$ d) $Hg(NO_3)_2$ e) $BaCl_2$ surgöres med utspädd saltsyra och respektive lösningar mättas med svavelväte.
7. Ett kolväte innehåller 85,7 % kol och 14,3 % väte. Föreningens molekylvikt är 28. Angiv a) kemiska formeln för kolvätet b) dess namn c) strukturformeln för detsamma.
8. Beräkna hur många liter klorgas av 0° C och 760 mm kvicksilver som teoretiskt åtgår för att överföra 6,8 g $FeCl_2$ till $FeCl_3$.
9. För att neutralisera 10,70 ml av en saltsyra, vars täthet är 1,01, åtgår 30,20 ml 0,2 N lösning av natriumhydroxid. Beräkna saltsyrans sammansättning i a) viktsprocent b) normalitet.
10. För bestämning av halten MnO_2 i brunsten behandlas 0,154 g brunsten med koncentrerad saltsyra. Den härvid bildade gasen inledes i en lösning av kaliumjodid. Den frigjorda joden titreras med 0,121 N natriumtiosulfatlösning, varvid åtgår 25,60 ml. Hur många procent MnO_2 innehåller brunstenen?

Atomvikter:

C=12,0 Cl=35,5 Fe=55,8 Mn=54,9 Na=23,0 S=32,1

Resultat: **7.** a) C_2H_4 b) etylen. **8.** 0,601 liter. **9.** a) 2,04% b) 0,564 N. **10.** 87,4%.

Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskinteknisk linje

1. I en enkel kuggväxel är det mindre hjulets toppdiameter (ytterdiameter) 156 mm och det större hjulet har 200 kuggar. Axelavståndet är 375 mm och utväxlingen 1 : 4. Beräkna a) modulen, b) det större hjulets toppdiameter, c) de båda hjulens delningsdiametrar.
2. Två plattjärn är hopskruvade med varandra genom en skruv W 7/8″. Med muttern åstadkommes i skruven en största dragspänning av 500 kp/cm². Friktionskoefficienten mellan plattjärnen är 0,32. Hur stor dragkraft kan anbringas i plattjärnen, innan de börjar glida mot varandra?
3. En kraftledningsstolpe av trä har 8 m höjd över marken upp till trådarna samt en diameter vid roten av 175 mm. Under hård blåst åstadkommer vindtrycket på tråden en horisontell kraft av 150 kp per stolpe. Samtidigt verkar vindtrycket på själva stolpen med en kraft av 8 kp per löpmeter. Beräkna böjspänningen vid stolpens rot.

4. Ett tvåskärigt nitförband skall överföra en belastning av 16 Mp. På var sida om skarven placeras 6 nitar. De båda huvudplåtarna, som ligger mellan skarvplåtarna, har 8 mm tjocklek. Den tillåtna skjuvpåkänningen på nitarna är 750 kp/cm² och det tillåtna hålkanttrycket 1800 kp/cm². Vilken nitdiameter bör väljas?
5. Motorn till åkmaskineriet på en lyftkran utvecklar en effekt av 10 hk vid 930 r/m. Över en kuggväxel, vars kuggantal är 24 och 97, driver motorn en mellanaxel, som i sin tur driver hjulaxeln. Beräkna mellanaxelns diameter för vridning, då tillåtna vridpåkänningen är 250 kp/cm².
6. Vid provning av en centrifugalpump uppmättes de värden, som finns upptagna i nedanstående tabell. Beräkna pumpens verkningsgrad för de fyra punkterna och rita ett diagram, som visar, hur verkningsgraden varierar med vattenmängden i liter per minut. Avläs ur diagrammet verkningsgraden vid 560 lit/min och beräkna, hur många hästkrafter som pumpen erfordrar vid denna vattenmängd och en tryckhöjd av 40,2 m.

Vattenmängd i lit/min	400	500	600	700
Tryckhöjd i meter	41,7	41,0	39,7	37,5
Effektbehov i hk	6,4	7,2	8,1	9,0

7. Ett vattenfall med 4,6 m fallhöjd skall utbyggas. Strax ovanför fallet i samma vattendrag finnes en kraftstation med 19 m fallhöjd, där 3 turbiner på vardera 550 hk är installerade. Det anses lämpligt att endast installera en turbin i den nya stationen. Beräkna dennas effekt i hästkrafter, då samtliga turbiner kan antagas ha samma verkningsgrad.
8. En biografsalong skall ventileras under en 10 minuters paus mellan två föreställningar. Man kan räkna med att 2000 m³ friskluft därvid passerar genom fläkten, som har att övervinna ett motstånd av 90 mm vattenpelare. Fläktens verkningsgrad är 0,72. Hur stor effekt uttryckt i hästkrafter kräver fläkten? Ett tryck av 1 mm vattenpelare motsvarar 1 kp/m².

Resultat: **1.** a) 3 mm b) 606 mm c) 600 och 150 mm. **2.** 430 kp. **3.** 280 kp/cm². **4.** 19 mm. **5.** 40 mm. **6.** 7,7 hk. **7.** 400 hk. **8.** 5,6 hk.

Almkvist
Beskow
Herlin
Knave
Wetterblad

FYSIK för realgymnasiet

1. Mekanik *av Göran Beskow G 4:—*

2. Värmelära *av Ernst Herlin G 4:25*
Utkommer sommaren 1956

3. Elektricitetslära *av Ernst Knave*
Utkommer hösten 1956

Lektor Helge Stolt säger i sitt utlåtande till Läroboksnämnden om del 1:

»Föreliggande lärobok är synnerligen omsorgsfullt utarbetad och fyller högt ställda krav på saklighet, reda och ordning.»

Lönnqvist | **Astronomi** *G 3:75*

»Författaren har lyckats klarlägga astronomiens grunder på ett så intresseväckande sätt, att arbetet icke endast utgör en förträfflig lärobok utan även en populärvetenskaplig avhandling, som på det bästa kan rekommenderas i allmänhetens hågkomst.»
Fritz Stenfelt i T.f.S.L.

SVENSKA BOKFÖRLAGET

KOLBOKCENTRALEN
David Bagares gata 20 · Stockholm C
Tel. 23 69 80 · Postgiro 551 60
Utställning även Parkgatan 19, Göteborg

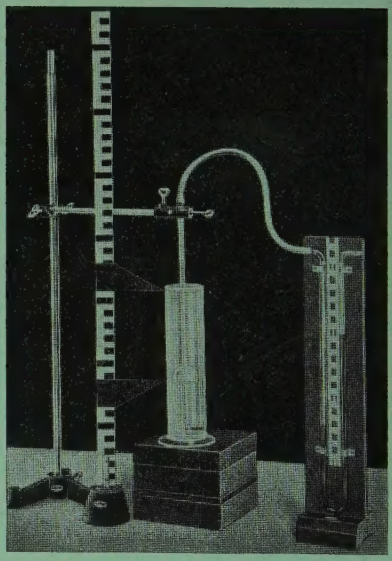
S B
F

Utställning
Lärarexemplar
Rekvisitioner
Hamngatan 4, Malmö

PHYWE MATERIEL

FÖR ÅSKÅDLIGARE UNDERVISNING

Norstedts Skolavdelning är generalagent i Sverige för Phywes förstklassiga undervisningsmateriel. På vårt huvudkontor eller våra avdelningskontor ute i landet står vi gärna till tjänst med demonstrationer och upplysningar om Phywes »Aufbaumetod» och den materiel som behövs därtill.



NORSTEDTS SKOLAVDELNING

Stockholm, Lilla Nygatan 13, tel. 23 29 70

Göteborgskontoret	Malmökontoret	Linköpingskontoret	Luleåkontoret
Parkgatan 19	Hamngatan 4	Klostergatan 26	Tullgatan 16
tel. 13 92 93	tel. 97 70 90	tel. 487 20	tel. 134 10

Lund 1955, Håkan Ohlssons Boktryckeri